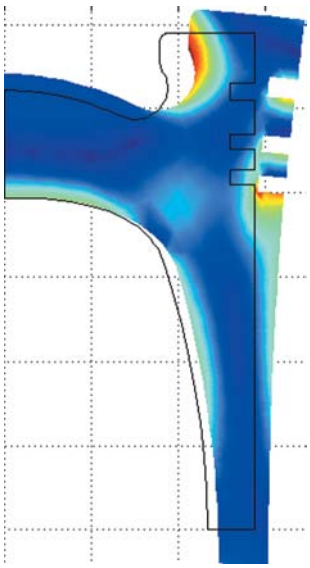
Modelování úloh ve vědě a technice

Složité systémy nebo jejich části pomáhá velmi často řešit metoda konečných prvků. Touto metodou jsou řešeny draky letadel, karoserie automobilů, využívána je například také při simulaci proudění tekutin. Každá z těchto oblastí využívá programové balíky, které jsou pro uvedené obory svým způsobem specifické.

Řada vědeckotechnických úloh, jejichž model vytváříme, však může být popsána matematickými vztahy - rovnicemi. Většinou se jedná o výrazy řešitelné pouze numerickými metodami, které mají stejný teoretický základ. Při modelování úlohy se tedy nabízí možnost rozdělit postup na dvě části – na výběr rovnice, která řešenou úlohu popisuje a na výběr použité numerické metody. Modelování může probíhat v jednotném grafickém prostředí a máme-li k dispozici knihovnu rovnic popisující úlohy v širokém vědeckotechnickém spektru, je na světě univerzální software použitelný v řadě oborech.



Obr.1 Deformace a napjatost von Mises uvniř pístu po 25 sec.

Jedním z produktů, který pracuje shora uvedeným způsobem, je programový balík FEMLAB vyvíjený švédskou firmou COMSOL AB. Na stránkách tohoto časopisu se čtenáři s FEMLABem seznámili v loňském prosincovém a v letošním lednovém čísle. Jedná se o univerzální software s možností řešit úlohy popsané parciálními diferenciálními rovnicemi (PDR) metodou konečných prvků. Hnacím motorem pro jeho činnost je široce rozšířený MATLAB. Výhodou tohoto spojení je možnost vzájemné výměny dat (zadání i výsledků), popřípadě vzájemné využití příkazů obou těchto programů.

Ve FEMLABu je každá úloha formulovaná pomocí PDR, zadávají se jejich okrajové podmínky a parametry charakterizující materiál nebo prostředí. Pro práci s programem však není třeba rutinně ovládat speciální matematické postupy a teorie, ale rozhoduje znalost profese. Přestože je FEMLAB otevřený systém, obsahuje řadu předdefinovaných úloh z různých oblastí fyziky jako je například elektromagnetismus, elektrostatika, prostup tepla, difúze nebo pružnost a pevnost. Další výhodou tohoto programu založeného na principu modelování pomocí rovnic je možnost kombinovat v jedné řešené úloze několik aplikací (a tedy rovnic) najednou. Příkladem může být současný vliv zatížení, teploty a elektrické vodivosti. Takto definované úlohy nazýváme multifyzikální. Dále může FEMLAB využívat tak zvané svázané proměnné (coupling variables), které umožňují přenášet výsledky výpočtů na kterékoliv místo geometrického modelu nebo dokonce do jiného geometrického tělesa. V tomto případě mluvíme o rozšířené multifyzice (extended multiphysics).

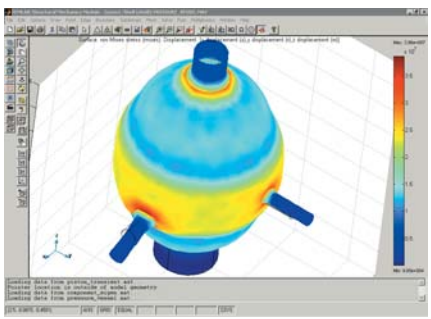
V následujících odstavcích bude uvedeno několik příkladů z různých profesních oblastí. První z nich je pružnost a pevnost. FEMLAB sám o sobě umožňuje řešit ve 2D prostoru rovinnou napjatost a rovinnou deformaci, ve 3D výpočet deformace plného tělesa. Rozšiřující modul Structural Mechanics module (SMM) nabízí další aplikace jako jsou Eulerovy nosníky, skořepiny, Mindlinovské desky nebo osově symetrické úlohy s možností tepelného zatížení součásti.

Příkladem osově symetrické úlohy může být výpočet tepelného zatížení horní části pístu spalovacího motoru. Přechodné zvýšení teploty odpovídá zvýšenému výkonu motoru. Zatížení vypočtené v přechodném stavu je podstatně vyšší, než ve stavu ustáleném. Model je řešen jako multifyzikální úloha se současným využitím dvou aplikací – řešení osově symetrické deformace a napjatosti a vlivu teploty na chování materiálu.Vstupními daty pro řešení je závislost modulu pružnosti v tahu na teplotě matriálu společně s jeho dalšími charakteristikami, jako jsou tepelné a mechanické vlastnosti. Úloha je řešena ve dvou krocích - jako stacionární a závislá na čase. K řešení jsou vyžity Lagrangeovy elementy druhého řádu (obr. 1).

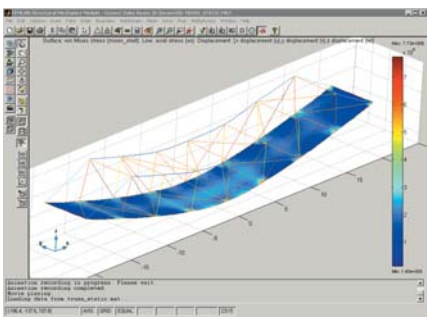
Dalším příkladem z oblasti pružnosti a pevnosti je řešení zatížení a deformace tlakové nádoby definované jako skořepina. Tloušťka stěn je 3 cm a vnitřní tlak v nádobě je 0.8 MPa, k řešení jsou využity Argyrisovy elementy (obr. 2).

Kombinaci aplikací pro výpočet Eulerových nosníků a skořepiny vznikla následující multifyzikální úloha. Je proveden výpočet zatížení mostu dlouhého 40 m jehož nosnou část vytváří příhradová konstrukce z prvků, jejichž průřez má tvar H. Spodním část mostu tvoří vozovka široká 5 m, která má betonový podklad. Ve výpočtu se uvažuje gravitační síla vozovky a jednotlivých prvků mostní konstrukce. V polovině mostu vytváří zatížení nákladní automobil o hmotnosti 10 tun. Vozovka je řešena jako skořepina. Úloha je nejprve řešena jako statická, v druhém případě jsou zjišťovány vlastní frekvence mostu (obr. 3).

Univerzálnost použití FEMLABu dokládá další příklad. Naším úkolem je zjistit rezonanční oblasti v místnosti o půdorysných rozměrech 5 x 4 m a výšce stropu 2.6 m s umístěným televizním přijímačem, hifi zařízením a reproduktory. Úloha je z oblasti akustiky,

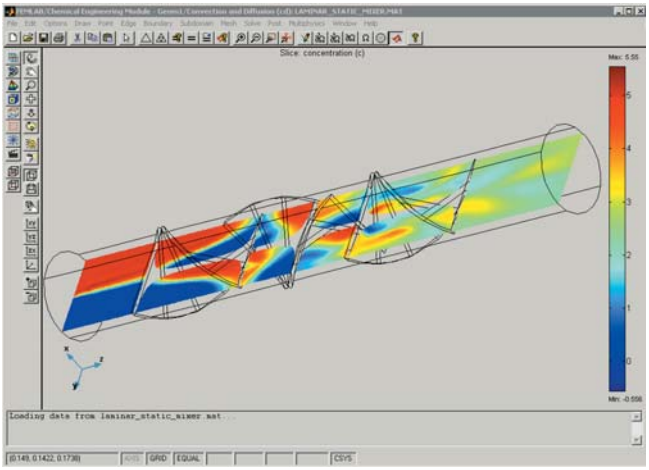


Obr.2 Napjatost von Mises a deformace nádoby zatížené vnitřním tlakem

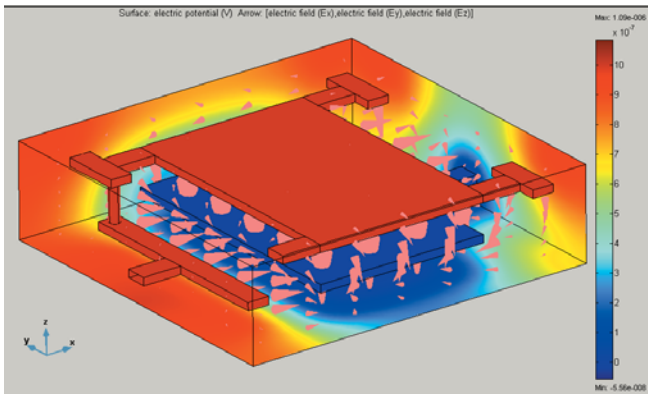


Obr.3 Statické řešení mostu zatíženého uprostřed nákladním automobilem

Obr.4 Zobrazení izoploch se stejnou frekvencí, rezonance je kritická za sedací soupravou



Obr.5 V průřezu je znázorněna změna koncentrace proudících látek při průchodu trubkou



Obr.6 Zobrazení elektrického potenciálu, šipky znázorňují elektrické pole ve všech třech prostorových osách

kde zjišťujeme možné rezonance při nižších tónech, tj. s frekvencemi pod 100 Hz. Pro řešení úlohy není využita předem popsaná standardní aplikace, ale do obecné PDR vyjádřené pomocí koeficientů uživatel tyto koeficienty sám definuje. Dále je při řešení využita další vlastnost FEMLABu – definice svázaných proměnných. Místnost je po délce symetrická a každá polovina tvoří jednu oblast, nazývanou ve FEMLABu jako subdoména. V tomto případě je to objem. Při řešení jsou předávána data z jedné poloviny místnosti do druhé a také do okrajových podmínek na hranách místnosti a na všech geometrických objektech uvnitř (obr. 4).

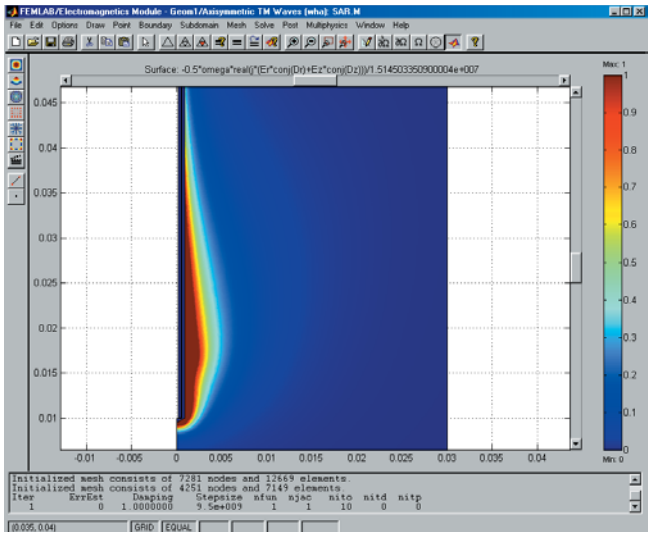
Ve FEMLABu lze provádět akustickou a vibrační analýzu v oblastech jako je automobilový průmysl, návrh reproduktorů a ostatních audio zařízení, vibrace strojů a zařízení, akustika konstrukcí a jejich interakce s tekutinami, aeroakustika, piezoelektrická zařízení a ultrazvuk.

Dalším uvedeným příkladem je řešení úlohy pomocí definovaných aplikací v rozšiřujícím modulu Chemical Engineering Module (Chem) s využitím PDR pro konvekci a difuzi společně s prouděním v nestlačitelném prostředí popsaném Navier-Stokesovými rovnicemi. Geometrický model je kovová trubka se třemi pevnými listy tvarovanými do šroubovice. Do otvoru na vstupu proudí odděleně dvě látky, které se po průchodu trubkou mají co možná nejvíce promíchat. Délka trubky je 17 cm a má průměr 12 mm. Naším úkolem je zjistit, jestli je k promísení obou látek počet lopatek uvnitř trubky dostatečný, dále můžeme zkoumat rychlostní pole na vnitřních stěnách a kolem lopatek (obr. 5).

Chem je také zvláště upraven pro modelování palivových článků s předdefinovaným aplikačním rozhraním pro rovnice posuvu v elektrochemických článcích.

V dalším příkladě se řeší model elektrostaticky laditelného kondenzátoru používaného v mikro-elektro-mechanických systémech (MEMS), které pracují ve rozsahu frekvencí od 300 MHz do 300 GHz. V principu jde o to, že změnou napětí se mění vzdálenost mezi oběma elektrodami, přičemž rovnováha systému je zajištěna pružinou mezi destičkami. Známe-li napětí a charakteristiku pružiny, můžeme určovat vzdálenost mezi destičkami. V uvedeném příkladě modelujeme pro nastavenou vzdálenost napětí a elektrické pole. K řešení je využita předem definovaná aplikace Elektrostatika v lineárním statickém režimu z modulu pro elektromagnetismus a elektrostatiku Elektromagnetics Module (EM) (obr. 6).

Poslední příklad je z medicíny, z oblasti onkologie, kde zhoubné a málo přístupné nádory mohou být odstraňovány lokálním působením vysokých vnitřních teplot. Při působení sondy nesmí být porušena okolní tkáň, proto je třeba řešit ovládání teploty, její speciální rozložení a navrhnout tepelné senzory a jejich umístění. Zobrazený model je tenká mikrovlnná anténa, která se vkládá do nádoru. Skládá se z tenkého koaxiálního kabelu a 1 mm široké kruhové štěrbiny vyříznuté do silnějšího vodiče. Anténa pracuje s frekvencí 2,45 GHz a z hygienických důvodů je umístěna do ochranného obalu. FEMLAB řeší úlohu ve 2D a k řešení je použita aplikace osově symetrické TM vlny (Axisymetric TM waves) z EM (obr. 7).



Obr.7 Výpočet specifického absorpčního poměru (SAR) je větší na konci sondy a kolem kruhového otvoru

Uvedené příklady jsou jenom částečným průřezem možností FEMLABu. Součástí programu je knihovna asi 100 řešených příkladů s názorným a krok po kroku popsaným postupem. Každé zadání úlohy může probíhat dvěma způsoby. Názornější je zadávání vstupních dat přes grafické rozhraní, jehož výhodou je zobrazování dialogu pro okrajové podmínky podle předdefinované aplikace. Pro pokročilé uživatele je možnost zadání celého řešení prostřednictvím příkazové řádky MATLABu, včetně definice geometrického modelu. FEMLAB obsahuje funkce pro vytváření geometrických těles v prostředí MATLABu. Takto vytvořené modely (např. parametricky vytvářená tělesa) lze snadno importovat do grafického prostředí FEMLABu. FEMLAB také čte soubory ve formátech DXF a IGES. Naopak můžeme výsledná data exportovat do pracovního prostoru MATLABu nebo geometrická tělesa zapisovat do souborů DXF a IGES.

S FEMLABem můžeme pracovat pod operačním systémem Windows nebo UNIX (včetně LINUXu).

Výhradní distributor pro ČR a SR:
HUMUSOFT®

Humusoft, s. r. o.

Karel Bittner
Novákových 6, 180 00 Praha 8, ČR
http://www.humusoft.cz

23