AT&P JOURNAL 9/2003

Modelování procesů na dopravních sítích

Petr Cenek

Přeprava zásilek po úsecích dopravní sítě je základním procesem v dopravních systémech a důležitou částí činnosti logistických systémů. Optimální řízení dopravních procesů přináší lepší kvalitu služeb, úsporu nákladů a snižuje škodlivé vlivy dopravy na životní prostředí. Tvorba vhodných modelů je základem pro optimalizaci procesů na dopravních sítích.

Úvod

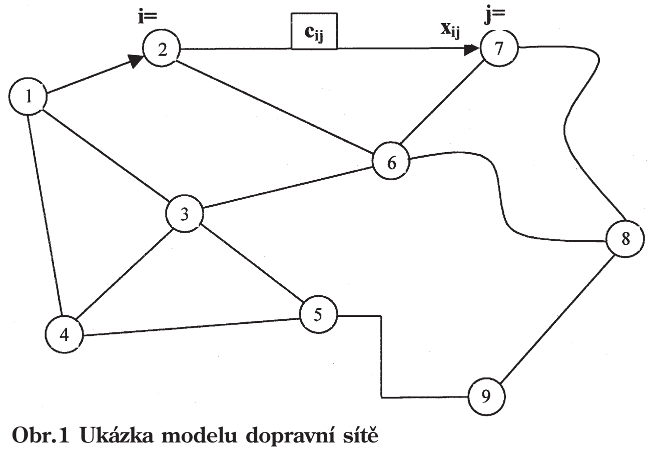
Problematika modelování procesů na dopravních sítích volně navazuje na článek [1], ve kterém jsme ukázali, že dopravní systém můžeme rozdělit na dopravní síť (infrastrukturu), dopravní proudy a řídicí podsystém. Dále jsme rozdělili modely dopravních systémů na modely makroskopické a mikroskopické. Stručně řečeno, mikroskopické modely se zabývají podrobnějším popisem pohybu (dynamiky) jednotlivých vozidel, zatímco v makroskopických modelech se zabýváme spíše plánováním budování sítě a určováním optimálních cest vozidel. Dopravní proudy reprezentujeme přepravovaným množstvím a nezajímáme se o dynamiku jejich pohybu. Právě makroskopickým modelům a odpovídajícím optimalizačním metodám se budeme dále věnovat.

Úlohy, které máme řešit, představují převážně problémy kombinatorického charakteru, při kterých hledáme nejlepší variantu z množství přípustných variant řešení. Mezi typické úlohy patří hledání optimálních cest v síti (pro přepravu mezi uzly sítě anebo pro okružní jízdy při svozu a rozvozu zásilek), časové rozvrhy jízd, umísťování středisek v síti pro obsluhu požadavků v uzlech a na úsecích sítě (lokační úloha) a úloha návrhu sítě (výběr úseků, které umožní přepravu zásilek na síti za minimální cenu).

Všechny popisované úlohy musí být řešeny na konkrétně zadané síti, proto má dopravní síť a její model nezastupitelné místo a budeme se budování takových modelů věnovat podrobněji. Pro řešení úlohy potřebujeme model a správné vstupní údaje, optimalizační metody pro řešení problémů a v neposlední řadě prostředky pro prezentaci modelu a výsledků řešení uživateli. Ukážeme proto jak matematickou formulaci úloh, tak i možnosti jejich grafické prezentace.

Dopravní síť

Dopravní síť představuje infrastrukturu, po které se mohou pohybovat zásilky (vozidla anebo zprávy). Je tvořena uzly a úseky sítě, kde pod uzly můžeme rozumět obce, města, železniční stanice, počítačové servery anebo telefonní ústředny a úseky tvoří komunikace mezi těmito uzly (železniční trati, silnice, vodní toky, telefonní anebo datové kabely a pod.). Pro ilustraci je příklad dopravní sítě ukázán na obr. 1.



Obr.1 Ukázka modelu dopravní sítě

Příklad sítě na obr. 1 představuje model obecné sítě. Na modelu vidíme uzly označené kroužky s čísly (jmény) uzlů a úseky spojující jednotlivé uzly. Úseky mohou být neorientované anebo orientované (označené šipkou na konci jako např. úsek z uzlu 1 do uzlu 2). Úsek může být reprezentován pouze úsečkou mezi koncovými uzly anebo může mít libovolný tvar (obecné křivky nebo lomené čáry), který lépe odpovídá skutečnému tvaru komunikace. V obrázku je dále ukázán popis základních údajů o síti. Počáteční a koncový uzel určitého úseku můžeme obecně označit indexy např. i a j, jak je ukázáno na obrázku, přepravované množství na daném úseku potom označíme x_{ij} a ohodnocení úseku c_{ij}. Ohodnocení úseku vyjadřuje náklady na přepravu po daném úseku, například vzdálenost, dobu jízdy, spotřebu pohonných hmot atď.

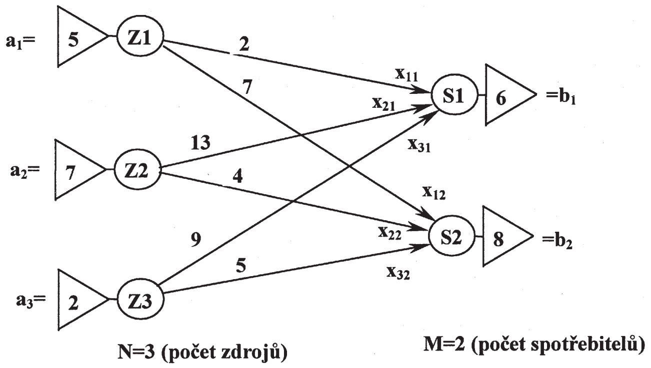
Dopravní síť na obr. 1 silně připomíná graf používaný v teorii grafů. Skutečně bychom mohli model z obr. 1 považovat za graf. Pojem dopravní síť používáme proto, abychom odlišili infrastrukturu reálného dopravního systému od čistě matematické struktury známé z teorie grafů. V reálných dopravních sítích (na rozdíl od grafu) probíhá řada procesů, jako přeprava zásilek (dopravní proud), shromažďování a třídění zásilek. Prvky dopravní sítě mohou mít mnoho dalších parametrů, jako jsou kapacitní a rychlostní omezení na úsecích, grafický motiv a pod. Pro jednoduché úlohy, kterými se budeme dále zabývat, bychom mohli pro dopravní síť alternativně používat i pojem graf.

Dopravní úloha

Obr. 1 představuje grafický model dopravní sítě a může sloužit jako zobrazovací prostředek pro komunikaci s uživatelem. Abychom mohli řešit určitou optimalizační úlohu, potřebujeme vytvořit matematický model daného problému a pomocí takového modelu a vhodné optimalizační metody řešit náš problém. Pro ukázku postupu při tvorbě matematického modelu použijeme jako příklad dopravní úlohu.

Dopravní úloha předpokládá dva druhy uzlů sítě. Ve zdrojích vznikají zásilky, které mají být po síti přepravovány. Zdroje mohou představovat například výrobní podniky produkující ledničky, pračky, ložiska, uhlí nebo písek atd. Druhá skupina uzlů jsou spotřebitelé (ústí sítě), kteří mají určité požadavky na dodané množství těchto produktů. Máme-li omezené kapacity zdrojů, určené požadavky spotřebitelů a ohodnocení úseků sítě představuje jednotkové náklady (náklady na přepravu jednotky produktu z počátečního do koncového uzlu), potom řešení dopravní úlohy určuje optimální množství produktů, které mají být dopravovány po každém úseku sítě (v našem případě od zdroje ke spotřebiteli). Musí to proběhnout tak, aby nebyly překročeny kapacity zdrojů, byly

TEÓRIA A PRAX



Obr.2 Grafický model dopravní úlohy

uspokojeny požadavky všech zákazníků a celkové náklady na přepravu byly minimální.

Na obr. 2 je ukázán grafický model dopravní úlohy, který je snadno pochopitelný i nezkušenému uživateli. V systému máme tři zdroje Z1, Z2 a Z3 a dva spotřebitele S1 a S2. Produkty můžeme dopravovat od každého zdroje ke každému spotřebiteli s jednotkovými náklady, které jsou označeny u každého úseku (např. $c_{11} = 2$ pro úsek od zdroje Z1 ke spotřebiteli S1).

Matematická formulace optimalizační úlohy

Naším úkolem bude vybudovat matematický model dopravní úlohy, který může sloužit pro nalezení optimálního řešení. Úkolem je nalézt takové řešení, které bude vyžadovat minimální celkové náklady na přepravu, a proto si tyto náklady musíme nejprve vypočítat. Jestliže na úseku (i,j) ze zdroje Zi ke spotřebiteli Sj budeme převážet množství x_{ij} a přeprava každé jednotky bude stát c_{ij}, potom celkové náklady na přepravu celého množství na úseku (i,j) budou $x_{ij} \cdot c_{ij}$. Náklady na přepravu všech produktů od zdrojů ke spotřebitelům budou součtem nákladů na všech úsecích, tedy

$$C = x_{11} \cdot c_{11} + x_{21} \cdot c_{21} + x_{31} \cdot c_{31} + x_{12} \cdot c_{12} + x_{22} \cdot c_{22} + x_{32} \cdot c_{32}$$

resp. zapsáno v obecném tvaru (pro počet zdrojů $N = 3$ a počet spotřebitelů $M = 2$)

$$C = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} x_{ij} \cdot c_{ij}$$

Celkové náklady jsou kritériem kvality řešení dopravní úlohy a cílem je tyto celkové náklady minimalizovat, tedy nalézt

$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_{ij} \cdot c_{ij}$$

Řešení úlohy musí splňovat podmínky, které jsou vyjádřeny ve slovní formulaci úlohy, tzn. nesmíme překročit kapacitu zdrojů, a musíme splnit požadavky všech spotřebitelů. Pro každý uzel sítě přitom platí, že v něm žádné produkty nevznikají ani se neztrácejí, tzn. co do uzlu přijde, musí z něho také odejít (podmínka zachování toků v uzlech sítě). Do zdroje přitom přichází množství znázorněné hodnotou v trojúhelníčku směřujícím do uzlu a u spotřebitele se spotřebovává (zaniká) množství znázorněné hodnotou v trojúhelníčku směřujícím z uzlu ven. Při formulaci rovnic zachování toků v uzlech sítě budeme zachovávat pravidlo, že přicházející množství budeme přičítat a odcházející množství budeme odečítat. Například ze zdroje Z1 odchází množství x_{11} ke spotřebiteli S1 a množství x_{12} ke spotřebiteli S2, pro zdroj Z1 bude tedy platit podmínka zachování toků

$$(Z1:) \quad +5 - x_{11} - x_{12} = 0$$

resp. po převedení konstanty na pravou stranu rovnice

$$(Z1:) \quad -x_{11} - x_{12} = -5$$

Podobně vytvoříme podmínku zachování toků v uzlu spotřebitele S1, do kterého přicházejí množství x_{11} od zdroje Z1 a množství x_{21} od zdroje Z2. Podmínka bude mít tvar

$$(S1:) \quad +x_{11} + x_{21} - 6 = 0$$

a po převedení konstanty na pravou stranu rovnice

$$(S1:) \quad +x_{11} + x_{21} = +6$$

Podobným způsobem vytvoříme podmínky zachování toků ve všech uzlech modelu a dostaneme následující soustavu rovnic

$$\begin{array}{lccccccrr}
(Z1:) & -x_{11} & -x_{12} & & & & & = & -5 \\
(Z2:) & & & -x_{21} & -x_{22} & & & = & -7 \\
(Z3:) & & & & & -x_{31} & -x_{32} & = & -2 \\
(S1:) & +x_{11} & & +x_{21} & & +x_{31} & & = & +6 \\
(S2:) & & +x_{21} & & +x_{22} & & +x_{32} & = & +8
\end{array}$$

Pro všechny proměnné x_{ij} musí, samozřejmě, platit, že dopravované množství nesmí být záporné. Vyjádříme-li nyní podmínku optimálního řešení i podmínky zachování toků v obecném tvaru pomocí sum, dostaneme následující model dopravní úlohy

$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_{ij} \cdot c_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = a_i \qquad \text{pro } i = 1,2,\ldots,N$$

(podmínky zachování toků ve zdrojích)

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = b_j \qquad \text{pro } j = 1,2,\ldots,M$$

(podmínky zachování toků pro spotřebitele)

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1,2,\ldots,N \text{ a } j = 1,2,\ldots,M$$

Uvedená matematická formulace dopravní úlohy představuje lineární model, protože jak účelová funkce vyjadřující cíl optimalizace, tak všechny podmínky zachování toků v uzlech sítě se skládají pouze ze součtů anebo rozdílů lineárních výrazů, ve kterých se vyskytuje vždy jen jedna proměnná, vynásobená konstantou, ale žádná funkce nebo mocnina proměnné nebo násobení více proměnných. Takovým modelům říkáme modely lineárního programování a odpovídající úlohy můžeme v obecném případu řešit například simplexovou metodou.

Popis dopravní úlohy (a úloh na sítích všeobecně) jako úlohy lineárního programování nám posloužilo k zatřídění těchto úloh do širší kategorie optimalizačních úloh. Použití obecného algoritmu pro úlohy lineárního programování (např. simplexové metody) pro řešení takových úloh by však bylo neefektivní, protože existují mnohem výkonnější algoritmy využívající zvláštní struktury úloh na sítích (např. maďarská metoda, která může být použita pro řešení dopravní úlohy).

Při matematické formulaci dopravní úlohy jsme téměř intuitivně dospěli od grafického k matematickému modelu a pravděpodobně existuje i opačná cesta, jak z matematické formulace vytvořit grafický model. Abychom mohli grafický model vytvořit, musí se jednat skutečně o model úlohy na síti, a musí proto platit následující podmínky:

1. V každém sloupci soustavy omezujících podmínek (pro každou proměnnou) musí být právě dva koeficienty nenulové. Jeden se zápornou hodnotou (-1) v podmínce zachování toků v počátečním uzlu a druhý s kladnou hodnotou (+1) v podmínce pro koncový uzel odpovídajícího úseku.
2. Počet omezujících podmínek musí být roven počtu uzlů sítě.
3. Počet použitých proměnných musí být roven počtu úseků sítě.
4. Pokud dodržíme zvolený způsob orientace toků (kladné znaménko pro přicházející a záporné pro odcházející tok), bude hodnota pravé strany rovnice určovat, že:
   – při záporné hodnotě pravé strany rovnice se jedná o zdroj,
   – při kladné hodnotě pravé strany rovnice se jedná o spotřebitele,

– při nulové hodnotě pravé strany rovnice se jedná o tranzitní uzel, kterým pouze produkty procházejí (v příkladu na obr. 2 se takový uzel nevyskytuje).

Modifikace modelu dopravní úlohy

Model na obr. 2 představuje základní variantu dopravní úlohy, kde uzly jsou rozděleny na dvě disjunktní množiny zdrojů a spotřebitelů. Jednou z možných modifikací je zobecněná dopravní úloha, ve které může být mezi zdroji a spotřebiteli libovolný počet tranzitních uzlů, představujících například sklady, velkoobchodní prodejny apod. Příklad takové úlohy je ukázán na obr. 3.

Další vlastností dopravní úlohy podle obr. 2 (o které jsme se zatím nezmínili) byla její vybilancovanost, což znamená, že součet kapacit všech zdrojů byl roven součtu požadavků všech spotřebitelů

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{j=1}^{M} b_j$$

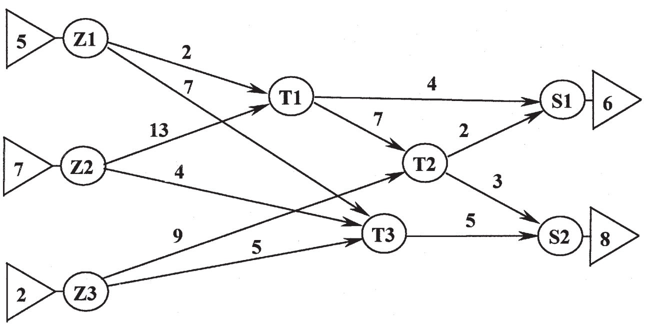
V tomto případě jsou všechny požadavky odběratelů uspokojeny a žádný ze zdrojů nezůstane nevyužitý. Pokud dopravní úloha není vybilancovaná (jako např. na obr 4) a máme přebytek na straně zdrojů (resp. spotřebitelů), musíme do modelu přidat další fiktivní uzel pro spotřebitele (resp. zdroj) tak, abychom přebytek kapacit zdrojů odčerpali tímto fiktivním spotřebitelem, resp. abychom přebytek požadavků spotřebitelů uspokojili fiktivním zdrojem. Na obr. 4 je model upraven pro případ přebytku na straně kapacit zdrojů.

K modelu je přidán fiktivní spotřebitel fS 3 s požadavkem rovným přebytku kapacit zdrojů, který vypočteme jako rozdíl součtu kapacit zdrojů a součtu požadavků všech spotřebitelů

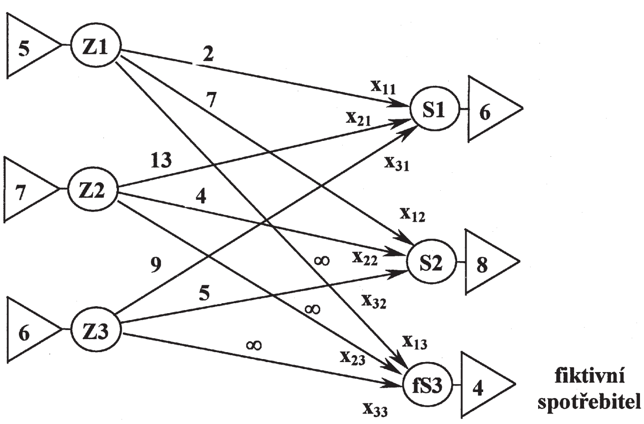
$$b_3 = \sum_{i=1}^{N} a_i - \sum_{j=1}^{M} b_j$$

Model musí být dále doplněn o nové úseky od všech zdrojů k fiktivnímu spotřebiteli. Pokud vypočteme přesně velikost požadavku pro fiktivní zdroj, jako v našem případě, na ohodnocení těchto nových úseků nezáleží. Pokud bychom požadavek fiktivního spotřebitele stanovili větší než je nutné pro dosažení vybilancovanosti úlohy, bylo by třeba nastavit ohodnocení nových úseků na dostatečně velkou hodnotu (v našem případě jsme ji symbolicky označili ∞).

Model dopravní úlohy může sloužit nejen pro plánování dopravních procesů, ale pomocí takových modelů můžeme plánovat i finanční toky, můžeme pomocí nich plánovat úlohy skladování a můžeme modelovat i různé výrobní činnosti a hledat možnosti jejich optimálního plánování.



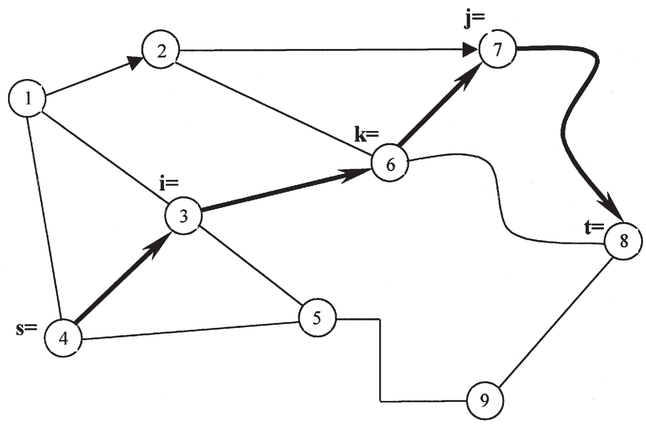
Obr.3 Model zobecněné dopravní úlohy



Obr.4 Úprava modelu nevybilancované dopravní úlohy

Hledání cest v síti

Velké množství optimalizačních úloh na sítích představuje hledání optimální (obvykle nejkratší) cesty v síti. Úloha hledání cesty v síti je ilustrována obr. 5.



Obr.5 Úloha hledání cesty v síti

Na obrázku je silnější čarou vyznačena cesta z uzlu s do uzlu t. Hledání nejkratší cesty si můžeme představit jako hledání nejlevnější možnosti přepravy jednotkového toku (což můžeme interpretovat např. jako jízdu jednoho vozidla) z počátečního do koncového uzlu. Proměnná x_{ij} bude určovat, zda úsek byl vybrán do cesty (v tom případě bude hodnota $x_{ij} = 1$) anebo v cestě nebyl použit (potom $x_{ij} = 0$). Protože v běžné dopravní síti není každá dvojice uzlů spojena úsekem, použijeme označení H pro množinu všech existujících úseků v síti $(i, j) \in H$. Délku cesty, která je kritériem optimálnosti řešení, potom můžeme vypočítat jako součet ohodnocení úseků sítě použitých v cestě

$$\sum_{(i,j)\in H} x_{ij} \cdot c_{ij}$$

Omezující podmínky budou předepisovat podmínku zachování jednotkového toku ve všech uzlech na cestě. Pro počáteční uzel cesty (který můžeme považovat za zdroj podle předcházejícího modelu) musí platit, že součet všech proudů vycházejících z uzlu musí být roven jedné (právě jedním úsekem z uzlu vycházíme)

$$\sum_{(i,j)\in H} -x_{ij} = -1 \qquad \text{pro } i = s$$

a podobně pro součet toků přicházejících do koncového uzlu musí platit

$$\sum_{(i,j)\in H} x_{ij} = 1 \qquad \text{pro } j = t$$

Pro všechna ostatní uzly sítě k musí platit, že v nich žádný proud nevzniká ani nekončí a rozdíl součtu proudů do uzlu přicházejících a z uzlu odcházejících proto musí být roven nule

$$\sum_{(i,k)\in H} x_{ik} = \sum_{(k,j)\in H} -x_{kj} = 0 \qquad \text{pro } k \neq s \text{ a } k \neq t$$

Pro úlohu hledání cest navíc bude platit podmínka, že proměnné x_{ij} mohou nabývat pouze hodnot 0 anebo 1

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{pro vsechny } (i,j) \in H$$

Další optimalizační úlohy na sítích

Dopravní úloha a hledání nejkratší cesty v síti jsou asi nejjednodušší optimalizační úlohy na síti. Další úlohy už jsou podstatně náročnější na výpočet a proto uvedeme jen jejich slovní formulaci.

Lokační úloha hledá optimální počet a umístění středisek v uzlech sítě (např. umístění skladů, výrobních kapacit, seřaďovacích stanic a pod.) tak, aby náklady na vybudování a provoz středisek spolu s náklady na obsluha požadavků na síti byly minimální.

Svozní a rozvozní úlohy řeší problematiku optimalizace svozu a rozvozu zásilek do, resp. ze střediska. V úloze obchodního cestujícího je třeba vyjít ze střediska, navštívit všechny uzly sítě právě jednou a vrátit se zpátky do střediska tak, aby celková délka cesty byla minimální. V úloze obchodního cestujícího se nepočítá s omezenou kapacitou vozidla ani s jinými dalšími omezujícími podmínkami. Úloha okružních jízd řeší podobně jako úloha obchodního cestujícího problematiku obsluhy všech uzlů sítě avšak respektuje přitom omezenou kapacitu vozidla a obsluha se proto rozdělí zpravidla na více okružních jízd.

Návrh sítě je výpočetně nejnáročnější úlohou a má za úkol z množiny H všech přípustných relací (může se jednat o budování fyzických komunikací – železničních tratí, silnic, anebo o nabídku dopravních služeb jako jsou vlakové, autobusové anebo letecké spoje) vybrat optimální podmnožinu R tak, aby dopravní požadavky na přepravu na síti byly obslouženy s minimálními náklady. Celkové náklady se přitom skládají z nákladů na vybudování vybraných relací (postavení silnice, zavedení autobusového spoje apod.) a z nákladů na vlastní obsluhu dopravních požadavků, zadaných obvykle maticí intenzit požadavků na přepravu z každého do každého uzlu sítě.

Závěr

Dopravní procesy jsou důležitou částí každodenního života. Optimální řízení dopravních procesů proto může přinést významné úspory nákladů a zvýšit kvalitu poskytovaných služeb. Potřebná optimalizace je přitom poměrně jednoduchá a snadno využitelná v praxi. Společnostem, které jí využívají (často společně se zaváděním inteligentních dopravních systémů), přináší komparativní výhodu a možnost zlepšení jejich postavení na trhu oproti společnostem, které moderní metody řízení nepoužívají.

Článek se snažil vysvětlit základní postup při tvorbě optimalizačních modelů, a to jak grafického modelu, pomocí kterého se může uživatel seznámit s návrhem optimálního řešení (případně navrhovat úpravy řešení), tak i matematického modelu, který používáme pro formální popis problému a pro potřeby návrhu a implementace optimalizačních algoritmů. Za hlavní cíl jsme přitom považovali potřebu seznámit širší okruh čtenářů s principy modelování dopravních procesů a možností optimalizace jejich řízení.

Pro řešení konkrétní úlohy bychom potřebovali ještě kvalitní vstupní údaje a vhodnou metodu řešení. Naneštěstí údaje o dopravní infrastruktuře a dopravních proudech jsou rozsáhlé soubory dat a v našich podmínkách jsou tyto údaje zpravidla těžko dostupné a málo kvalitní. Ve světě je příprava takových údajů řešena často jako státní zakázka a údaje jsou poskytovány za přijatelných podmínek (např.v USA zdarma od Federal Bureau of Statistics, v Německu přibližně za cenu vyhotovení datového nosiče v kartografickém ústavu). Těžká dostupnost vstupních dat je tedy v našich podmínkách nejvážnější brzdou optimalizace řízení dopravních procesů.

Další problémy praktické implementace optimalizačních metod jsou snáze řešitelné. Optimalizační algoritmy pro většinu běžných optimalizačních úloh jsou známé a dovolují nalézt optimální anebo alespoň kvalitní suboptimální řešení úlohy v přijatelném čase. Informace o optimalizačních algoritmech může čtenář nalézt v publikacích [2], [3], [4] uvedených v seznamu literatury, příklad algoritmu Tabu search je popsán v příspěvku [5].

Literatura

[1] CENEK, P.: Modelování a řízení dopravních systémů. AT&P journal, 6, 2002, s. 88 - 89.

[2] CENEK, P., KLIMA, V., JANÁČEK, J.: Optimalizace dopravních a spojových procesů. EDIS, VŠDS, Žilina 1994.

[3] JANÁČEK, J.: Matematické programování. EDIS – ŽU, Žilinská univerzita. Žilina 1999.

[4] JANÁČEK, J.: Optimalizace na dopravních sítích. EDIS-ŽU, Žilinská univerzita, Žilina 2002.

[5] JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ.: An Adaptation of the Tabu Search Metaheuristic to the Problem of Transportation Planning. In: Preprints of the „IFAC/IFIP/IFORS Symposium – Transportation systems". Tech. University of Crete, Chania, Greece 1997, pp. 765 - 768.

prof. Ing. Petr Cenek, CSc

Katedra dopravných sietí
Fakulta riadenia a informatiky
Žilinská univerzita
010 26 Žilina

48