

Inžinierske metódy nastavovania parametrov PI regulátora pre systémy MIMO (1)

Vojtech Veselý

Článok analyzuje problematiku návrhu parametrov PI regulátora inžinierskymi metódami pre mnohorozmerný systém na základe merania matice zosilnenia objektu.

Úvod

Teoreticky existuje veľa spôsobov, ako navrhnuť regulátor tak, aby mal uzatvorený regulačný obvod (URO) požadované vlastnosti. Pri realizácii tejto úlohy treba poznať matematický model objektu. V praxi máme často o modeli procesu k dispozícii len málo informácií. Tu nastupujú inžinierske metódy nastavovania regulátorov, ktorými sa zaoberá tento článok.

Inžiniersky prístup návrhu regulátora je určitým kompromisom medzi metódou pokus – omyl a analytickou metódou návrhu. Metódy patriace do tejto oblasti nepotrebuje presný matematický model riadeného systému, čo je nevyhnutné pre analytické metódy. Vychádzajú z niekoľkých experimentálne ľahko zistiteľných charakteristických čísel riadeného systému. Tieto čísla sa získajú z prechodovej charakteristiky objektu, vybudením URO na hranicu stability alebo meraním matice zosilnenia pre mnohorozmerné systémy.

V tomto príspevku uvedieme niektoré inžinierske metódy návrhu PI regulátorov pre mnohorozmerné systémy založené na meraní matice zosilnenia objektu. Ako príklad riadenia mnohorozmerného objektu možno zobrať napríklad bubnový kotol a jeho malé okolie, kde možno identifikovať aj tieto regulačné obvody:

1. regulácia úrovne hladiny vody v kotle,
2. regulácia tlaku pary v kotle,
3. regulácia podtlaku vzduchu v ohnisku,
4. pomerová regulácia množstva vzduchu a paliva privádzaného do ohniska,
5. regulácia teploty vzduchu vstupujúceho do ohniska,
6. regulácia teploty pary atď.

Na jednom objekte existuje niekoľko regulačných obvodov medzi ktorými existujú interakčné väzby. Mnohorozmerný systém je systém s viacerými vstupnými, $u \in R^m$ a výstupnými $y \in R^l$ premennými. Jednou zo základných úloh pri identifikácii systému MIMO je:

- a) výber takej množiny výstupov objektu y , ktorej riadením možno splniť požadované ciele objektu;
- b) výber takej množiny vstupných riadiacich veličín u , ktorá zabezpečí riadenie vybranej množiny výstupných riadených veličín y ,
- c) vybrať dvojice $\langle y_i, u_i \rangle, i = 1, 2, \dots, m$ (párovanie dvojíc) tak, aby bol mnohorozmerný systém riaditeľný decentralizovaným riadením.

Nech úlohy a-c sú na systéme MIMO už realizované a úlohou je inžinierskymi metódami navrhnuť parametre PI regulátora. Jednou zo základných inžinierskych metód návrhu parametrov PI regulátora je využitie nevyhnutných podmienok na zavedenie zápornej spätnej väzby pre mnohorozmerný PI regulátor. Cieľom tohto krátkeho príspevku je rozpracovanie práve tejto úlohy.

1. Nevyhnutné podmienky stability systému MIMO s PI regulátorom

Ak máme systém MIMO G s PI regulátorom R

$$G: \dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad (1)$$

Pre opis mnohorozmerného PI regulátora treba zaviesť nový stavový vektor $x_r \in R^m$

$$\dot{x}_r = w - y \quad (2)$$

kde w je vektor žiadaných hodnôt. Rovnica opisujúca PI regulátor je v tvare

$$R: u = K_p(w - y) + K_I x_r \quad (3)$$

kde $K_p, K_I \in R^{m \times l}$ sú matice zosilnení proporcionálnej a integračnej časti PI regulátora. Pre uzatvorený regulačný obvod (URO) platí

$$G + R: \begin{cases} \dot{x} = (A - BK_p C)x + BK_I x_r + BK_p w \\ \dot{x}_r = w - Cx \end{cases} \quad (4)$$

V maticovej forme

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ I \end{bmatrix} w \quad (5)$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability systému MIMO je, aby vlastné čísla matice A_c alebo nuly zodpovedajúceho charakteristického polynómu ležali v ľavej časti komplexnej roviny, kde matica A_c je

$$A_c = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Posledný koeficient charakteristickej rovnice URO je

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \text{Det}[sI - A_c] = \det[-A_c] \quad (7)$$

Ak koeficient a_0 bude kladný, potom budú splnené nevyhnutné podmienky zavedenia zápornej spätnej väzby pre mnohorozmerný PI regulátor. Platí

$$\begin{aligned} a_0 = \text{Det}[-A_c] &= \text{Det} \begin{bmatrix} -(A - BK_p C) & -BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \text{Det}[-A + BK_p C] \text{Det}[0 + C(-A + BK_p C)^{-1} BK_I] \end{aligned} \quad (8)$$

Keď zohľadníme, že pre maticu statického zosilnenia objektu platí

$$K = C(-A)^{-1}B \quad \text{a} \quad \text{Det}[I + QS] = \text{Det}[I + SQ]$$

po malej úprave z rovnice (8) dostaneme nevyhnutné podmienky zavedenia zápornej spätnej väzby pre mnohorozmerný regulátor

P regulátor:

$$\text{Det}[I + K_p K] > 0 \quad \text{Det}[-A] > 0 \quad (9)$$

PI regulátor:

$$\text{Det}[KK_I] > 0 \quad \text{Det}[-A] > 0 \quad (10)$$

Ak uvedené podmienky (9) alebo (10) nie sú splnené, pre vybraný systém nemožno navrhnuť stabilizujúci mnohorozmerný alebo decentralizovaný P (PI) regulátor. Pri výbere systému na reálnom objekte treba dodržať zásady uvedené v úvode danej práce.

2. Praktický postup výberu parametrov PI regulátora

Praktický postup nastavovania parametrov PI regulátora závisí od toho, či regulátor patrí do triedy mnohorozmerných alebo decentralizovaných. Inžiniersky postup výberu parametrov PI regulátora možno rozložiť do týchto krokov:

1. V rôznych pracovných bodoch objektu sa odmerajú matice statických zosilnení K_1, K_2, \dots, K_N . Vypočíta sa veľkosť neurčitosti matice zosilnenia δK

$$\|\delta K\| = \max_j \|K - K_j\| \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{kde } K = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_j$$

predstavuje nominálne zosilnenie objektu $\|\cdot\|$ predstavuje normu príslušnej matice. Ďalej sa overí platnosť nevyhnutných podmienok pre vybraný regulátor, pri existencii neurčitosti v systéme, t. j. keď je zosilnenie objektu $\bar{K} = K + \delta K$. Pre PI dostaneme

$$\text{Det}[\bar{K}K_I] = \text{Det}[(K + \delta K)K_I] = \text{Det}[KK_I] \text{Det}[I + K^{-1}\delta K] > 0 \quad (11)$$

Nevyhnutná podmienka zavedenia zápornej spätnej väzby pri existencii neurčitosti δK bude splnená, ak bude príslušný determinant kladný pre nominálny model a súčasne bude platiť nerovnosť

$$\|\delta K K^{-1}\| < 1 \quad (12)$$

Pre P mnohorozmerný regulátor možno získať podobnú nerovnosť ako (12). Ďalej predpokladajme, že podmienka (11) je splnená.

2. Výber P zložky regulátora. Pre mnohorozmerný P regulátor maticu zosilnenia K_p treba vybrať

$$K_p = \beta K^{-1} \quad \beta \geq 0 \quad (13)$$

V tomto prípade pre nerovnosť (9) platí

$$\text{Det}[I + K_p K] = \text{Det}[I + \beta K^{-1} K] = (1 + \beta)^m > 0$$

Postupným zvyšovaním koeficientu β sa nastaví veľkosť prvkov matice K_p proporcionálneho regulátora. Ak je regulátor decentralizovaného typu, výber K_p sa uskutoční takto

$$K_p = \beta [\text{diag}\{K\}]^{-1} \quad \beta \geq 0 \quad (14)$$

Diagonálnu maticu zosilnenia K_p treba čiastočne modifikovať tak, aby bola splnená podmienka (9). Zvyšovaním koeficientu β do hranice stability a jeho znížením na polovicu nastaví sa hodnota zosilnenia decentralizovaného P regulátora.

3. Výber I zložky regulátora. Ak máme uzatvorený regulačný obvod s PI regulátorom opísaný maticou

$$A_c = \begin{bmatrix} A - BK_p C & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_p C & \alpha BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Úlohou je nájsť také podmienky pre výber \bar{K}_I aby sa pri zväčšovaní koeficientu $\alpha \geq 0$ vlastné čísla matice A_c posúvali smerom doľava, t. j. aby sa systém stabilizoval. Podľa [1] ak platí podmienka

$$\text{Re}(\lambda_i(K_{pu} K_I)) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

kde $K_{pu} = (I + K_p K)^{-1} K_p K$ sa zvyšovaním $\alpha > 0$ vlastné čísla matice A_c budú posúvať doľava za predpokladu, že URO je stabilné s P regulátorom. Nech pre I zložku mnohorozmerného regulátora platí

$$K_I = \alpha \bar{K}_I = \alpha K^{-1} \quad \text{kde } \text{Re}(\lambda_i(\bar{K}_I)) > 0$$

potom podmienky (10) a (16) sú

$$\text{Det}[KK_I] = \text{Det}[\alpha KK^{-1}] = \alpha^m > 0$$

a

$$\text{Re}(\lambda_i((I + \beta I)^{-1} \beta I \alpha \bar{K}_I)) = \frac{\alpha \beta}{1 + \beta} \text{Re}(\lambda_i(\bar{K}_I)) > 0 \quad (17)$$

Pre decentralizovaný PI regulátor I zložku regulátora možno vybrať takto

$$K_I = \alpha [\text{diag}\{K\}]^{-1} \quad (18)$$

potom podmienky (10) a (16) sú

$$\text{Det}[\alpha K [\text{diag}\{K\}]^{-1}] = \text{Det} \begin{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{Re}(\lambda_i(K_{pu} [\text{diag}\{K\}]^{-1} \alpha)) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

Podmienka (16) pre I mnohorozmerný (decentralizovaný) regulátor je

$$\text{Re}(\lambda_i(K K_I)) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

Ak parametre I regulátora sú vybrané podľa (17), potom je podmienka (20) splnená. Pre prípad decentralizovaného regulátora (18) je podmienka (20) splnená len vtedy, ak sú dvojice vstup/výstup vybrané správne (každá akčná veličina riadi jednu výstupnú veličinu).

Literatúra

- [1] LUNZE, J. (1988): Robust Multivariable Feedback Control. Akademie-Verlag Berlin.
 [2] VESELÝ, V., DRAHOŠ, P. (2004): Inžinierske metódy nastavovania parametrov regulátorov. AT&P journal, č. 2, 3, 4, roč. 9.
 [3] DRAHOŠ, P. (2004): Návrh PID regulátora inžinierskymi metódami. Diplomová práca, KASR-FEI STU Bratislava.

Pokračovanie v budúcom čísle.

Vojtech Veselý

FEI STU
 Ilkovičova 3
 812 19 Bratislava
 e-mail: vojtech.vesely@stuba.sk

30