Produkční funkce – účinný nástroj ekonomické analýzy firem (2)

Jaroslav Veselý

3. Některé základní charakteristiky produkčních funkcí

Při konstrukci a odhadu parametrů produkčních funkcí se vychází z určitých apriorních předpokladů, jejichž platnost v konkrétních aplikacích je třeba prověřovat. Pro produkční funkci dle (1) se obvykle požaduje splnění těchto podmínek:

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$, je-li $\mathbf{x}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m) \geq 0$.
- $f(\mathbf{x})$ je konečná neklesající funkce.
- Pro $f(\mathbf{x})$ existují spojité parciální derivace aspoň druhého řádu, přičemž pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$, platí

$$f_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} > 0 \qquad (2)$$

$$f_{ii} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{x_i^2} < 0 \qquad (3)$$

Podmínka (2) znamená, že objem výroby roste při zvětšení objemu kteréhokoliv výrobního faktoru, zůstává-li objem ostatních faktorů nezměněn. Splnění podmínky (3) lze interpretovat tak, že křivka výroby je pro libovolný i-tý výrobní faktor konkávní, takže zvětšení objemu jednoho faktoru při konstantním objemu zbývajících výrobních faktorů vede ke klesajícím přírůstkům objemu výroby.

Interpretaci některých vlastností a charakteristik produkčních funkcí ukážeme na nejčastěji v praxi používané dvoufaktorové produkční funkci. Ta popisuje závislost objemu výroby y na základních fondech F a lidské práci P.

V souladu s (1) lze zapsat dvoufaktorovou produkční funkci ve tvaru (4)

$$y = f(\mathrm{F}, \mathrm{P}) \qquad (4)$$

Produkční funkce (4) může být v určitých případech v bodě (F, P) homogenní funkcí libovolného stupně, pokud vyhovuje podmínce (5)

$$f(\lambda \mathrm{F}, \lambda \mathrm{P}) = \lambda^r \cdot f(\mathrm{F}, \mathrm{P}) \lambda > 0 \qquad (5)$$

Z (5) vyplývá, že rovnoměrné zvýšení objemu výrobních faktorů λ-krát, nazývané zvětšením rozsahu výroby, má za následek růst objemu výroby λ^r-krát. Parametr $r > 0$ určuje stupeň homogenity produkční funkce a charakterizuje výnos (efekt) z růstu rozsahu výroby. Je-li parametr $r > 1$, potom objem výroby vzroste více než objem výrobních faktorů, nebo – jinak řečeno – efekt z rozšíření rozsahu výroby je kladný. Je-li $r < 1$, efekt z růstu rozsahu výroby je záporný a tudíž objem výroby roste pomaleji než objem výrobních faktorů.

Je-li parametr $r = 1$, potom tempo růstu objemu výroby je stejné jako zvětšení rozsahu výroby, lze tedy hovořit o konstantních výnosech vzhledem k objemu výrobních faktorů. Tzn., že efektivnost výrobního procesu nezávisí na rozsahu výroby. Takováto produkční funkce se nazývá homogenní funkcí prvního stupně.

4. Cobbova – Douglasova produkční funkce

Jednou z nejznámějších a v praktických aplikacích nejčastěji používanou produkční funkcí je dvoufaktorová Cobbova – Douglasova produkční funkce (CDPF), jejíž statická podoba má tvar funkce dle (6):

$$y = a \cdot \mathrm{F}^{\alpha} \cdot \mathrm{P}^{\beta} \qquad (6)$$

kde a, α, β jsou kladné parametry. Hodnota parametru a závisí na zvolených měrových jednotkách všech tří proměnných, zároveň je předurčena i efektivností výrobního procesu.

Tzv. přírůstková produktivita základních fondů f_{F} je dána vztahem (7):

$$f_{\mathrm{F}} = \frac{\partial y}{\partial \mathrm{F}} = \alpha \frac{1}{\mathrm{F}} \cdot a \cdot \mathrm{F}^{\alpha} \cdot \mathrm{P}^{\beta} = \alpha \frac{y}{\mathrm{F}} \qquad (7)$$

a tzv. přírůstková produktivita živé práce f_{P} je dána vztahem (8)

$$f_{\mathrm{P}} = \frac{\partial y}{\partial \mathrm{P}} = \beta \frac{1}{\mathrm{P}} \cdot a \cdot \mathrm{F}^{\alpha} \cdot \mathrm{P}^{\beta} = \beta \frac{y}{\mathrm{P}} \qquad (8)$$

Parametry α a β vystupují jako konstanty proporcionality mezi přírůstkovými a průměrnými produktivitami obou faktorů a představují tzv. koeficienty pružnosti výroby vzhledem k základním fondům, popř. k živé práci.

Tzv. přírůstkové míry substituce faktorů F a P (jednoho faktoru druhým) lze pro CDPF vyjádřit výrazy podle (9):

$$s_P = \frac{f_F}{f_P} = \alpha\frac{y}{F} : \beta\frac{y}{P} = \frac{\alpha P}{\beta F}$$

$$s_F = \frac{f_P}{f_F} = \beta\frac{y}{P} : \alpha\frac{y}{F} = \frac{\beta F}{\alpha P} \qquad (9)$$

Ze vztahů (9) vidíme, že pro CDPF přírůstková míra substituce závisí pouze na proporci obou výrobních faktorů. Koeficient pružnosti substituce výrobních faktorů σ je pro CDPF roven 1 ($\sigma = 1$) v každém bodě (F, P). Tzn., že změně přírůstkové míry substituce jednoho výrobního faktoru druhým odpovídá stejná změna proporcí faktorů.

Stupeň homogenity CDPF je dán součtem parametrů $\alpha + \beta$. Tzn., že v případě CDPF nezávisí efektivnost výrobního procesu na rozsahu výroby, platí-li $\alpha + \beta = 1$. Pokud $\alpha + \beta < 1$, pak průměrné náklady na jednotku produkce při zvětšení rozsahu výroby rostou, zatímco pro $\alpha + \beta > 1$ klesají. Tato vlastnost CDPF, tj. určitý stupeň homogenity, platí pro všechny body (F, P) CDPF a nezávisí na velikosti (objemu) jednotlivých výrobních faktorů.

Při odhadu parametrů statické (na čase nezávislé) CDPF lze použít několik různých postupů. Jedním z nich je aplikace metody nejmenších čtverců na logaritmicko – lineární tvar produkční funkce dle vztahu (10)

$$\text{In } y_i = \text{In } a + \alpha \cdot \text{In } F_i + \beta \cdot \text{In } P_i + \varepsilon_i \qquad \text{pro } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (10)$$

kde y_i, F_i a P_i jsou průřezová data, představující i-tá pozorování proměnných, zjištěná u celkového počtu n relativně stejnorodých výrobních jednotek (firem, odvětví, ekonomik). Předpokládá se, že parametry α a β jsou stejné pro každou výrobní jednotku a technické či výrobní rozdíly mezi výrobními jednotkami jsou zahrnuty do proměnné ε_i produkční funkce.

Už je příkladově uvedeme hojně využívanou tzv. Tinbergenovu dynamickou CDPF, která má tvar dle (11)

$$y_t = a_0 \cdot e^{\gamma t} \cdot F_t^{\alpha} \cdot P_t^{\beta} \qquad a_0 > 0 \qquad (11)$$

kde proměnný parametr $a_0 \cdot e^{\gamma t} = a_t$, který v čase exponenciálně roste, měří měnící se efektivnost výrobního procesu v důsledku působení technického pokroku (know-how).

5. Produktivní funkce – deriváty produkční funkce

V každém výrobním procesu se jedná o kombinaci určitých vstupů (vstupních výrobních faktorů), které v procesu výroby různorodých komodit a/nebo služeb jsou spotřebovávány k tvorbě určitých výstupů (objemu výroby).

Množství vyrobené produkce y a nezbytných vstupů se dají zjišťovat jako jednotlivá množství potřebných vstupních výrobních faktorů (základních fondů, materiálů, finančního kapitálu, půdy, práce, energie atd.) $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$ pro tvorbu požadovaného množství výstupů. Víme také, že vztah mezi vstupy a výstupy je definován obecným tvarem produkční funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ dle vztahu (1). Jedná se tedy o obecné vyjádření nějaké matematické funkce o m proměnných (tj. do výrobního procesu vstupujících výrobních faktorů). Aby bylo možné s touto funkcí o více proměnných v praxi běžně pracovat, pak se v makro- i mikroekonomické praxi běžně zjednodušuje trojím způsobem [11]:

a) Agregací výrobních faktorů do dvou základních skupin:
   1. Výrobní faktory vyjadřující minulou práci (stroje, nářadí, materiály apod.).
   2. Výrobní faktory vyjadřující současnou živou práci (dělníci, pracovníci firemního managementu, externí odborníci apod.).

   Při praktických makro- a mikroekonomických analýzách se objem produkce obvykle vyjadřuje pouze v závislosti na dvou výrobních faktorech – základních fondech F a lidské práci P dle vztahu (4), resp. obecně x_1 a x_2. Využívá se tedy dvoufaktorová produkční funkce $y = f(x_1, x_2)$.

b) Parametrizací postupně podle jednotlivých výrobních faktorů podle vztahů (12):

$$y_1 = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0)$$
$$y_2 = f(x_1^0, x_2, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0)$$
$$y_3 = f(x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_i^0, \ldots x_m^0) \qquad (12)$$

   kde formální označení $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_i, \ldots, x^0_m$ označuje tzv. parametrické konstanty. Tím vzniká tzv. produktivní funkce pro výrobní faktory $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$ a vždy sledujeme produktivitu, tj. přínos pro výstup, jen jednoho z výrobních faktorů.

c) Vyjádřením produkční funkce v podobě tzv. izokvanty, u níž je parametrickou konstantou množství výstupu y, lze obecně zapsat vztahem (13):

$$y^0 = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m) \qquad (13)$$

   Pokud využijeme agregované, tj. pouze dvoufaktorové produkční funkce podle bodu a), pak izokvanta má podobu dle (14), což je ovšem jen jinak zapsaný vztah (4):

$$y^0 = f(x_1, x_2) \qquad (14)$$

   Izokvanta je taková křivka, která graficky zobrazuje průběh dvoufaktorové produkční funkce pro konkrétní (konstantní) objem výroby. Soustava izokvant je soustava křivek (čar) stejného sklonu zakřivení pro všechny možné kombinace výrobních faktorů x_1 a x_2, vedoucích k výrobě stejného množství produkce y_0.

Pro běžnou praxi má největší význam produkční funkce v podobě produktivní funkce, a to obvykle se dvěma agregovanými výrobními faktory. Jedná se tedy o účelovou kombinaci podle bodů a) a b). Tzn. pro dvě produktivní funkce zapsané – v souladu s formálním zápisem (12) – jednoduchými vztahy (15):

$$y_1 = f(x_1, x_2^0) \qquad y_2 = f(x_1^0, x_2) \qquad (15)$$

Ekonomická teorie [1], [2], [3], [4], [7], [11] zde vychází z toho, že nejpřijatelnější tvar produktivní funkce je dán matematickou funkcí třetího stupně, která je monotónně stoupající a je zpočátku progresivní a pak (později) degresivní. Má tedy (podobně jako nákladová funkce) inflexní bod, avšak její průběh je inverzní k průběhu funkce nákladové.

Každá matematická funkce, která se používá pro modelování ekonomických vztahů, se zpravidla k tomuto modelování využívá jen zčásti. To proto, že se obvykle využívá pouze kladný, tj. ekonomicky možný obor funkce a z něho často jen ta část funkce, která je stoupající – tj. tzv. ekonomicky smysluplný obor funkce.

V ekonomické praxi se nejvíce využívají čtyři druhy produktivních funkcí: lineární, progresivní, degresivní a progresivně – degresivní (blíže [10], [11]).

6. Příklad odhadu dynamické produkční funkce pro průmysl virtuální ekonomiky

Mějme odhadnout parametry Tinbergenovy dynamické CDPF danou vztahem (11) z údajů pro odvětví průmyslu virtuální ekonomiky za 16leté období.

K dispozici máme časové řady o objemu produkce (y_t) vyjádřené objemem hrubého domácího produktu (HDP) ve stálých cenách (v mil. Kč), o hodnotě strojních základních fondů (F_t) ve stálých cenách (v mil. Kč) a o počtu pracovníků (P_t). Vstupní data

rok	y_t	F_t	P_t
01	105 732	130 608	2 263 000
02	116 078	138 929	2 335 000
03	123 087	146 777	2 409 000
04	119 709	157 753	2 411 000
05	121 500	164 696	2 437 000
06	128 202	173 158	2 480 000
07	136 917	180 029	2 549 000
08	142 390	189 850	2 570 000
09	150 318	200 235	2 605 000
10	160 206	214 680	2 626 000
11	172 918	229 054	2 670 000
12	182 633	243 640	2 694 000
13	190 641	261 568	2 758 000
14	200 372	279 117	2 799 000
15	214 303	302 953	2 828 000
16	232 592	304 851	2 859 000

Tab.1 Časové řady y_t, F_t, P_t

pro odhad parametrů dynamické CDPF uvádí tab. 1. (Časové řady údajů pro y_t, F_t, P_t jsou převzaty z [5], avšak konkrétní 16leté časové období pro konkrétní průmysl konkrétní ekonomiky bylo relativizováno).

Odhadnuté parametry dynamické CDPF (11) pak nabývají následujících hodnot:

$a_0 = 3{,}6551 \quad \alpha = 0{,}5821$

$\beta = 0{,}1304 \quad \gamma = 0{,}0148$

Pak odhadovanou dynamickou Cobbovu – Douglasovu produkční funkci lze zapsat jako (16):

$$y_t = 3{,}6551 \cdot e^{0{,}0148t} \cdot F_t^{0{,}5821} \cdot P_t^{0{,}1304} \qquad (16)$$

Odhadnuté koeficienty pružnosti objemu HDP ke strojním základním fondům a počtu pracovníků jsou 0,5821 a 0,1304. Průměrný přírůstek HDP, způsobený nezpředmětněným technickým porokem, činí 1,48% ročně. Je možné také říci, že při konstantních objemech základních fondů a práce vzroste HDP v průmyslu ve zkoumaném 16letém období v průměru o 1,48% za rok právě v důsledku působení (tzv. nezpředmětněného) technického pokroku.

Součet odhadnutých parametrů $\alpha + \beta = 0{,}7125$. Jinak řečeno, v 16letém období mají průměrné výnosy z rozsahu obou výrobních faktorů základních fondů a živé práce klesající charakter. Z toho plyne, že efekt extenzivního růstu HDP je v daném 16letém období záporný.

Příklady aplikace (tvorby, analýzy, implementace a interpretace) produkčních funkcí na mikroekonomické úrovni firem uvádí např. [1], [3], [4], [6], [7], [9], 10], [11].

Závěrečné poznámky

Modelový aparát produkčních a produktivních funkcí je užitečným analytickým nástrojem zkoumání a kvantifikace extenzivních i intenzivních faktorů ekonomického růstu na makroekonomické i mikroekonomické úrovni.

Produkční funkce dynamického typu mohou být z jedním velmi dobrých východisek prognózování takových ekonomických ukazatelů, jakými jsou hrubý domácí produkt, produktivita práce, účinnost základních výrobních fondů, složek (atributů) vědecko-technického pokroku, rozvoje aplikací nových výrobních, informačních a telekomunikačních technologií atd.

Variantní krátkodobé a střednědobé prognózy, získané odhadem produkčních funkcí, mohou sloužit i k zabezpečování „optimálních" temp růstu ekonomik (států a jejich hospodářských uskupení) i jednotlivých odvětví a firem a hledání „optimální" struktury investic do státní i firemní ekonomiky s ohledem na předem zvolená kritéria.

Významným hlediskem, které bude spolurozhodovat o úspěšnosti aplikace modelového aparátu produkčních funkcí v reálné (národní, odvětvové i firemní) ekonomice, je aspekt „dobývání" (získávání) věrohodných dat pro odhady parametrů produkčních funkcí.

Aplikace produkčních funkcí jsou výraznou, pozitivně provokující výzvou také pro matematicko-ekonomické modelování, analýzu a prognózu rozvoje firem v ČR a SR.

Závěrem už jen „historizující poznámka": Byť základy teorie produkčních funkcí byly položeny v [2] už v roce 1928 s navazujícími průkopnickými aplikacemi (např. [3]), větší pozornost ekonomických odborníků se datuje až zhruba od 60. let 20. století, kdy se začaly intenzivněji hledat matematické nástroje formalizace teorie ekonomického růstu národních ekonomik a firem. V 70. a 80. letech se začaly produkční funkce využívat k matematicko-ekonomické analýze na makro- i mikroekonomické úrovni ve zvýšeném měřítku (např. [1], [5] aj.). Zájem o ně se znovu aktivuje na přelomu 20. a 21. století (viz např. [4], [6], [8], [9], [10], [11] aj.).

Literatura

[1] ALLEN, R. G. D.: Matematická ekonomie. Praha, Academia, 1971.

[2] COBB, CH. W., DOUGLAS, P. H.: A Theory of Production. American Economic Review, 1928, č. 18, s. 139 – 165.

[3] HENDERSON, J. M., QUANT, R. E.: Microeconomic Theory – A Mathematical Approach. New York, McGraw-Hill, 1958.

[4] MCCARTHY, P. S.: Transportation Economics – Theory and Practise: A Case Study Appproach. Oxford, UK, Blackwell Publishers, 2001.

[5] MAŇAS, M., HUŠEK, R.: Matematické modely v ekonomii. Praha, SNTL, 1989.

[6] POPELÍK, M.: Modelování dopravně přepravních procesů prostřednictvím produkčních funkcí. [Doktorská disertace.] Praha, Fakulta dopravní ČVUT, listopad 2004.

[7] SAMUELSON, P. A., NORDHAUS, W. D.: Ekonomie. Praha, Svoboda, 1991.

[8] The Production Function. In: www.ProdFce\CEPA\prodfunc.htm

[9] VESELÝ, J.: Produkční funkce – nástroj analýzy přínosů ITS systémů. [In: Projekt MD ČR č. 802/210/108 „ITS v podmínkách dopravně-telekomunikačního prostředí ČR".] Praha, FD ČVUT, prosinec 2003.

[10] VESELÝ, J.: Produkční funkce – strategický nástroj matematicko – ekonomické analýzy ekonomik, odvětví a firem. [In: „Úvod do systémové strategie dopravy".] Praha, Vydavatelství ČVUT, březen 2005. 275 s. (připraveno do tisku).

[11] VYSUŠIL, J.: Základy managementu. Praha, HZ, 1996.

Ing. Jaroslav Veselý, CSc.

40

Katedra řídicí techniky a telematiky
Fakulta dopravní
České vysoké učení technické v Praze, ČR
e-mail: vesely@fd.cvut.cz