

Mechatronicke pohybove systemy (8)

Ján Jovankovič, Milan Žalman

Elektromechanický systém

Pohybové rovnice

Pohybová rovnica vyjadruje vzťah medzi hnacím motorom a pracovným mechanizmom. Je matematickým vyjadrením vzťahov medzi momentmi a silami pôsobiacimi na mechanický subsystém pohonu a kinematickými veličinami (poloha, rýchlosť, zrýchlenie) určujúcimi vzniknutý pohyb. Najčastejším základom na zostavenie pohybovej rovnice je D'Alambertov princíp. Podľa tohto princípu je teleso rotujúce okolo pevnej osi v dynamickej rovnováhe, ak je výslednica všetkých momentov pôsobiacich na teleso nulová.

$$\sum M_i + M_d = 0 \quad (53)$$

kde $\sum M_i$ je súčet všetkých hnacích a záťažných momentov,
 M_d – dynamický moment.

Pre jednoduchý mechanický systém uvedený na obr. 40 možno rovnicu (53) upraviť na tvar

$$M_m - M_z = M_d \quad (54)$$

Pri posuvnom (translačnom) pohybe telesa, obr. 41, možno zapísať analogicky pohybovú rovnicu pre sily pôsobiace na teleso

$$\sum F_i + F_d = 0 \quad (55)$$

kde $\sum F_i$ je súčet všetkých hnacích a záťažných síl pôsobiacich na teleso,
 F_d – dynamická sila.

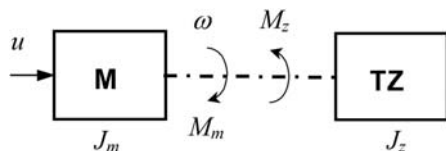
V ustálenom stave je moment motora v rovnovážnom stave so záťažným momentom, potom dynamický moment systému je rovný nule. Podobné rovnice platia aj pre mechanický systém pri translačnom pohybe.

$$\begin{aligned} M_d = 0 &\rightarrow M_m = M_z \\ F_d = 0 &\rightarrow F_m = F_z \end{aligned} \quad (56)$$

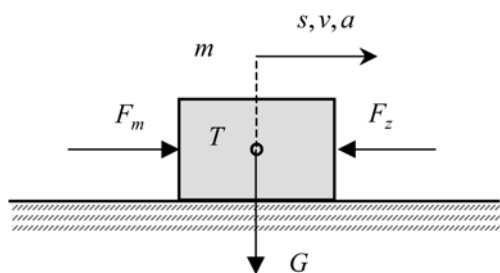
Ak sa moment motora M_m nerovná záťažnému momentu M_z , uplatnia sa zotrvačné účinky a vzniká dynamický moment M_d . Jeho veľkosť je určená vzťahom

$$M_d = J \frac{d\omega}{dt} \quad (57)$$

kde J je moment zotrvačnosti všetkých hmôt pohybujúcich sa v systéme.



Obr.40 Bloková schéma mechanického subsystému, kde M je motor, TZ – technologické zariadenie



Obr.41 Model mechanického systému pri translačnom pohybe

Ak predpokladáme, že celá hmota rotujúceho telesa je sústredená v ťažisku, tak pre moment zotrvačnosti platí vzťah

$$J = mr^2 \quad (58)$$

Podobne sa dá vyjadriť dynamická sila F_d

$$F_d = m \frac{dv}{dt} \quad (59)$$

kde m je hmota pohybujúceho sa telesa,
 v – translačná rýchlosť.

Mechanické charakteristiky motorov

V priemyselnej praxi sa prevažne používajú motory s rotačným pohybom. Prevádzkové vlastnosti motorov sa v ustálených stavoch opisujú mechanickými charakteristikami. Vyjadrujú sa ako momentové alebo záťažné charakteristiky, napríklad pre jednosmerný motor v tvare

$$M_m = f(U, \omega) \text{ alebo } \omega = f(M_m, U) \quad (60)$$

kde U je napätie kotvy jednosmerného motora,
 ω – uhlová rýchlosť motora.

Momentové charakteristiky motora sa vo všeobecnosti môžu vyjadriť v tvare

$$M_m = f(U, \omega, \varphi) \quad (61)$$

kde U je vektor riadiacich veličín,
 ω – uhlová rýchlosť motora,
 φ – uhol natočenia hriadeľa.

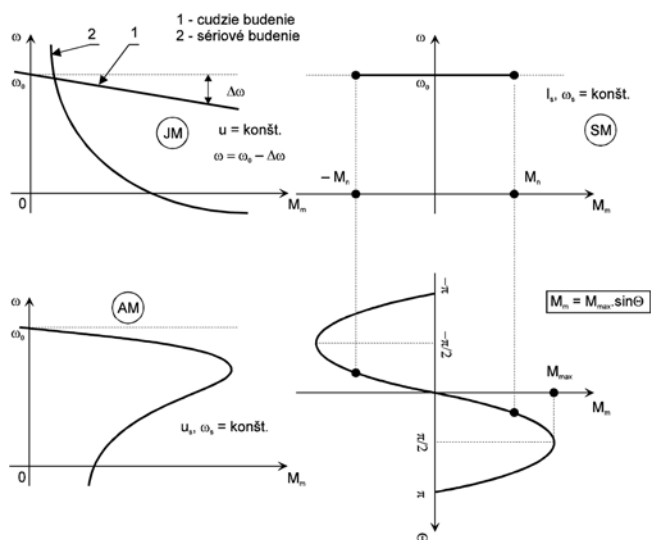
Typické momentové charakteristiky elektrických motorov sú na obr. 42.

Mechanické charakteristiky sa líšia svojou tvrdosťou

$$B' = \frac{\partial M_m}{\partial \omega} \quad (62)$$

Podľa nej rozlišujeme motory:

- s absolútnou tvrdou charakteristikou $B' = \infty$, synchronné motory,
- s tvrdou charakteristikou $B' \in (10,40)$, asynchronné motory, jednosmerné motory s cudzím budením,
- s mäkkou charakteristikou $B' < 10$, jednosmerné motory so sériovým budením.



Obr.42 Mechanické-záťažné charakteristiky elektrických motorov; JM – jednosmerný motor, AM – asynchronný motor, SM – synchronný motor

Prirodzené mechanické charakteristiky motorov (charakteristiky, keď majú riadiace veličiny nominálne hodnoty) nemôžu vyhovieť väčšine požiadaviek pracovných mechanizmov. Tým, že sa v prevádzkových podmienkach pohonov menia pasívne prvky elektrických obvodov motora (odpory, reaktancie), treba realizovať riadením motora regulačné mechanické charakteristiky motorov.

Mechanické charakteristiky pracovných mechanizmov

Závislosť záťažného momentu, ktorým mechanizmus zatažuje motor, vyjadruje mechanická charakteristika mechanizmu (stroja), vyjadrená vzťahom

$$M_z = f(\omega, \varphi, t) \quad (63)$$

kde ω je uhlová rýchlosť rotora motora,
 φ – poloha rotora,
 t – čas.

Mechanická energia privádzaná hnacím motorom do pracovného mechanizmu sa môže meniť (transformovať) na energiu kinetickú, potenciálnu a časť energie sa stratí. K premene mechanickej energie na kinetickú dochádza pri zmenách uhlovej rýchlosti (rozbeh, brzdenie). K premene mechanickej energie na potenciálnu dochádza vtedy, ak získava pracovný mechanizmus alebo ním dopravovaná látka (napr. výtahová kabínka) potenciálnu energiu. Záťažné momenty pracovných mechanizmov preto rozdeľujeme na:

- aktívne,
- pasívne.

Aktívne záťažné momenty charakterizujú pracovné mechanizmy, v ktorých dochádza k zmenám potenciálnej energie látok a telies. Pre aktívne záťaž je typické, že pri zmene smeru rýchlosti nemenia svoj zmysel.

Pasívnymi záťažnými momentmi pôsobia mechanizmy, v ktorých dochádza k obrábaniu, tvárneniu, treniu, prekonávaniu odporu vzduchu alebo iných prostredí a pod. Pasívne momenty záťaž menia zmysel pri zmene smeru rýchlosti. Pri všetkých piestových strojoch (piestové kompresory, čerpadlá) záťažný moment závisí od polohy kľuky, a teda aj od uhla natočenia hriadeľa.

Základné typy pasívnych momentových charakteristík:

- suché – Coulombovo trenie:

$$\text{pre } \omega \neq 0 \rightarrow M_z = M_{z0} \operatorname{sgn} \omega$$

$$\text{pre } \omega = 0 \text{ a } M_m \leq M_{z0} \rightarrow M_z = M_m \quad M_d = 0 \quad (64)$$

- viskózne trenie:

$$M_z = B' |\omega|^x \operatorname{sgn} \omega \quad (65)$$

kde $x = 0$ je suché trenie,

$x = 1$ – lineárne viskózne trenie,

$x = 2$ – kvadratické trenie (ventilátorová charakteristika),

$x = -1$ – hyperbolická charakteristika

(charakteristika navíjačky),

B' – koeficient viskózneho trenia.

Moment záťaže môže obsahovať aktívne a pasívne zložky záťaže

$$M_z = (B' |\omega|^x + M_{z0}) \operatorname{sgn} \omega + M_{za}(t) + f(\varphi) \quad (66)$$

kde M_{z0} je suché trenie,

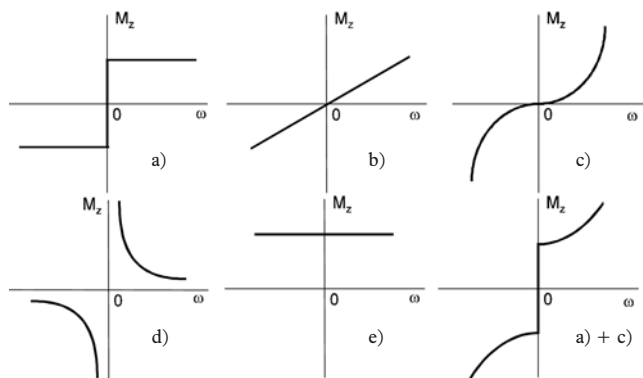
M_{za} – aktívny záťažný moment,

$f(\varphi)$ – moment záťaže ako funkcie uhla natočenia rotora (piestové čerpadlá).

Na obr. 43 sú uvedené typické záťažné charakteristiky pracovných mechanizmov.

Spojenie motora s pracovným mechanizmom

Motor môže byť s pracovným mechanizmom spojený priamo alebo nepriamo. Priame spojenie sa uskutočňuje letným pripojením mechanizmu na hriadeľ motora alebo spojkou. Nepriamo



Obr.43 Záťažné charakteristiky pracovných mechanizmov:

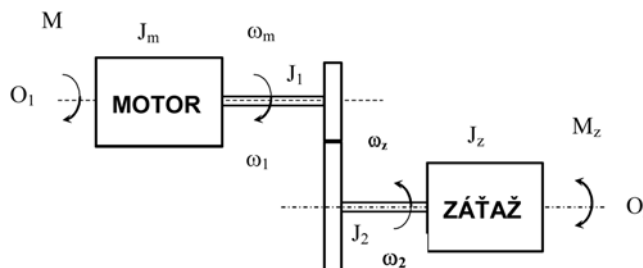
a) suché trenie, b) lineárna, viskózne trenie (textilné stroje),

c) kvadratická (ventilátorová) charakteristika, d) hyperbolická

(navíjačková) charakteristika, e) výtahová charakteristika

spojenie možno zabezpečiť prevodovkou (reduktorom) alebo iným typom mechanického meniča, ktorý zabezpečí transformáciu pohybu pohonu.

Servopohon s prevodom sa používa vtedy, ak má pracovný mechanizmus pracovať s inou rýchlosťou, než akú môže poskytnúť motor správne navrhnutý podľa technicko-ekonomických kritérií. Celý rad pracovných strojov (napr. v letectve, drevoobrábacie stroje) vyžaduje s ohľadom na zmenšenie rozmerov a hmotnosti rýchlooběžné pohony. Naopak existujú pracovné mechanizmy s požiadavkou na malé rýchlosti. Ak sa nepoužije pomaloběžný motor, potom sa obvykle zaraďuje prevodovka do pomala. Voľbu prevodu možno optimalizovať napr. podľa kritéria najväčšieho zrýchlenia mechanizmu v prechodnom deji.



Obr.44 Základná schéma spojenia motora s pracovným mechanizmom

J_m, J_z – moment zotrvačnosti motora, záťaže,

$J_1 = \sum_{O_1} J_i$ – výsledný moment zotrvačnosti pôsobiaci v osi otáčania O_1 ,

$J_2 = \sum_{O_2} J_i$ – výsledný moment zotrvačnosti pôsobiaci v osi otáčania O_2 ,

M_m, M_z – moment motora, moment záťaže,

ω_m – uhlová rýchlosť motora (vstupná rýchlosť ω_1),

ω_z – uhlová rýchlosť záťaže (výstupná rýchlosť ω_2).

Charakteristické údaje prenosového mechanizmu:

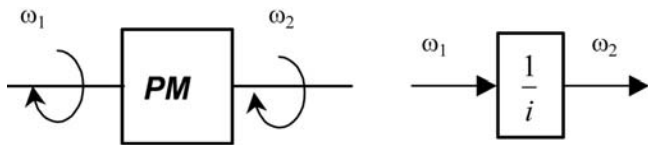
- prevodové číslo (zosilnenie, statická prevodová charakteristika),
- statická presnosť prenosu (vôľa v zuboch, mechanická hysteréza),
- dynamické vlastnosti – pružnosť,
- schopnosť prenosu energie (obojsmerný vstup/výstup a spätný alebo len vstup/výstup, napr. samosvorné prevody majú diódové charakteristiky),
- účinnosť prenosu (straty v prevodovke).

Interakcia systému motor – prevodovka – záťaž (základné vlastnosti), obr. 45.

$$\text{Prevodové číslo: } i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$i > 1$ – prevod do pomala (reduktory)

$i < 1$ – prevod do rýchla

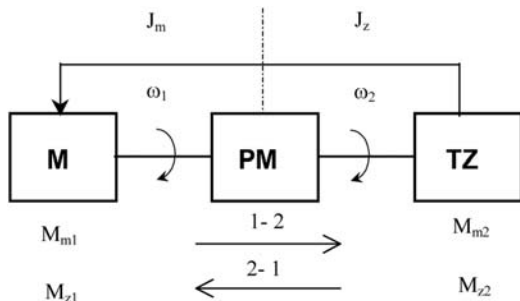


Obr.45 Interakcia systému motor – prevodovka – záťaž

Prevodovky môžeme roztriediť napr. podľa veľkosti prevodového čísla:

- malé $i = 2$ až 10, remeňové prevody ploché, klinové a ozubené, reťazové prevodovky s článkovou alebo Gallovou reťazou;
- stredné $i = 10$ až 100, viacstupňové prevodovky s ozubenými kolesami; ozubenie môže byť priame, šikmé, šípové a pod.;
- veľké $i > 100$, závitovkové, harmonické prevodovky, guľôčkové recyklačné skrutky, planétové prevodovky a pod.

Pri nepriamom spojení motora s pracovným mechanizmom pomocou prevodovky dochádza k vzájomnej interakcii motor – záťaž. Kvôli všeobecnosti aplikácií je na obr. 46 označený indexom 1 – vstupný hriadeľ prevodovky a indexom 2 – výstupný hriadeľ prevodovky. Prenosový mechanizmus nech je ideálny lineárny bez zotrvačného systému.



Obr.46 Transformácia momentov a uhlových rýchlostí

Transformácia momentov a síl vychádza zo zachovania energie. Moment záťaže redukovaný na hriadeľ motora je:

$$M_{z1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} M_{z2} = \frac{M_{z2}}{i} \quad (67)$$

Moment motora transformovaný na výstupný hriadeľ je:

$$M_{m2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} M_{m1} = M_{m1} \cdot i \quad (68)$$

Transformácia momentov zotrvačnosti vychádza zo zachovania kinetickej energie. Celkový moment zotrvačnosti redukovaný na hriadeľ motora (na vstupný hriadeľ O_1) je

$$J_{\Sigma 1} = J_{m1} + J_{z2} \frac{1}{i^2} \quad (69)$$

Dvojhmotový pružný systém

Na obr. 47 je zobrazená základná schéma dvojhmotového pružného systému. Torzný moment je vyjadrený vzťahom (70).

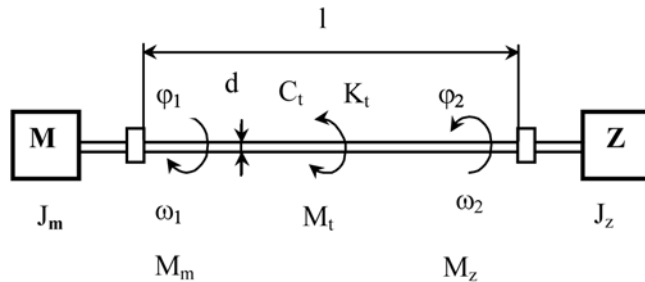
$$M_t = C_t (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (70)$$

$$M_t = \frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{l} (\Delta\varphi) \quad C_t = \frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{l}$$

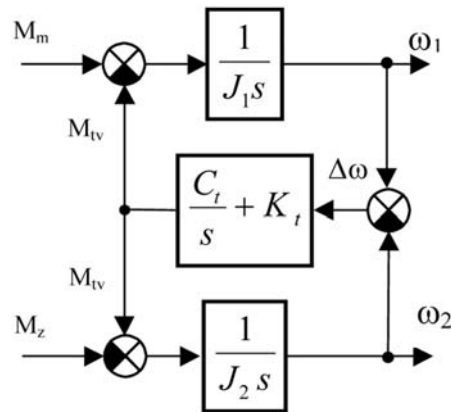
- kde M_t je torzný moment,
 C_t – konštanta torznej tuhosti [Nm/rad],
 G – modul pružnosti [N/m²],
 l – dĺžka pružnej tyče,
 d – priemer tyče,
 $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ je uhol deformácie (skrutk.)

$$M_m - M_t = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \quad (71)$$

$$M_t - M_z = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} \quad (72)$$



Obr.47 Základná schéma dvojhmotového pružného systému



Obr.48 Model dvojhmotového systému s tlmením

$$M_t = C_t \int (\omega_1 - \omega_2) dt \quad (73)$$

Model dvojhmotového pružného systému s tlmením opisujú rovnice (74) – (76) a je zobrazený na obr. 48.

Nech je K_t tlmiaca konštanta [Nms/rad].

$$M_{tv} = M_t + M_v = C_t \int (\omega_1 - \omega_2) dt + K_t (\omega_1 - \omega_2)$$

$$M_t = C_t \int (\omega_1 - \omega_2) dt$$

$$M_v = K_t (\omega_1 - \omega_2) \quad (74)$$

kde M_v je tlmiaci moment viskózneho trenia,
 K_t – tlmiaca konštanta [Nms/rad]

$$F_1(s) = \frac{\omega_1(s)}{M_m(s)} = \frac{1 + \frac{K_t}{C_t} s + \frac{J_2}{C_t} s^2}{(J_1 + J_2)s \left(1 + \frac{K_t}{C_t} s + \frac{J_{12}}{C_t} s^2 \right)} \quad (75)$$

$$F_2(s) = \frac{\omega_2(s)}{M_m(s)} = \frac{\frac{K_t}{C_t} s + 1}{s(J_1 + J_2) \left[\frac{J_{12}}{C_t} s^2 + \frac{K_t}{C_t} s + 1 \right]}$$

ak $C_t \rightarrow \infty$ potom

$$F_1(s) = F_2(s) \quad \text{a} \quad F_1(s) = \frac{\omega_1(s)}{M_m(s)} = \frac{1}{(J_1 + J_2)s} \quad (76)$$

Pokračovanie v budúcom čísle.

Ing. Ján Jovankovič, PhD.
 prof. Ing. Milan Žalman, PhD.

48

Slovenská technická univerzita v Bratislave
 Fakulta elektrotechniky a informatiky
 Katedra automatizácie a regulácie
 Ilkovičova 3, 842 47 Bratislava
 e-mail: jan.jovankovic@stuba.sk
 milan.zalman@stuba.sk