

Mechatronické pohybové systémy (9)

Ján Jovankovič, Milan Žalman

Elektromechanický systém

Prenosové mechanizmy

Prevodovky:

- s ozubenými kolesami (viacstupňové) ozubenie môže byť čelné, šikmé, šípové,
- remeňové: ozubené, ploché, klinové,
- refazové prevody s článkovou alebo Gallovovou refazou,
- závitovkový prevod – samosvorný prevod.

Ozubený remeň – vysoká účinnosť (0,98), presnosť (0,5 mm), vysoká obvodová rýchlosť, nízka hlučnosť, presnosť prevodu je na úrovni najpresnejších ozubených kôl, jednoduchá montáž a predpínanie, nízka hmotnosť a cena, medzi nevýhody patrí hlavne vyššia poddajnosť.

Základné požiadavky na prevody NC strojov a robotov sú vyjadrené vysokou účinnosťou, veľkou tuhosťou, bezvôľovým chodom a malou hmotnosťou.

Harmonická vlnová prevodovka (Harmonic Drive)

Harmonická prevodovka je moderný typ prevodu s vysokým prevodovým pomerom a vysokou účinnosťou. Pozostáva z nasledujúcich častí:

- **generátor vln**, ktorý tvorí vstupnú časť prevodovky; má eliptický valec, na ktorý je natiiahnuté guľôčkové vysokopriemerové ložisko;
- **pružné koleso s vonkajším ozubením (pružný cylinder)** s počtom zubov z_1 ,
- **tuhé teleso** s vnútorným ozubením s počtom zubov z_2 , ktoré tvorí výstupnú časť prevodovky, počet zubov z_2 je spravidla o dva väčší ako z_1 .

Pri otáčaní vstupného hriadeľa (generátora vln) sa so zhodnou kruhovou frekvenciou prenáša jeho eliptický tvar na pružné koleso s vonkajším ozubením. To sa v dôsledku precesie pohybuje relatívne pomalým pohybom opačným smerom. Pri pohybe je naraz v zábere približne 15 % všetkých zubov. Tým sa vysvetľuje možnosť prenosu vysokých momentov a malá vôľa. V harmonickej prevodovke existuje inherentné predpätie vytvorené tým, že pružný ozubený cylinder je vyrobený mierne kónicky a po nasunutí do tuhého ozubeného kolesa dochádza na najväčšom polomere k pružnej deformácii. Tá je zdrojom vlastného predpätia. Prevodové číslo je dané:

$$i = \frac{z_2}{z_1 - z_2} = -\frac{z_2}{2}$$

Výhody: súosový vstup a výstup, veľké prevodové číslo $i = 70$ až 350, umožňuje hermeticky oddeliť vstupný hriadeľ od výstupného.

Nevýhody: neznáša príliš veľké dynamické rázy, mimoriadne nároky na kvalitu materiálu, pružné spojenie na výstupe generuje druhú harmonickú uhlovej rýchlosti.

Guľôčkové recirkulačné skrutky

Presnosť polohovania dosahuje až 1 μm , maximálne zrýchlenie 6 m/s^2 a maximálna dĺžka skrutky je 5 m. Používajú sa na trans-

formáciu rotačného pohybu na priamočiary. Dosahujú účinnosť až 95 %, majú vysokú tuhosť, životnosť a minimálne nároky na údržbu.

Prevodovka obsahuje skrutku a obojstranne predpätú maticu. Presne zabrusené závitové skrutky a matice nie sú v priamom styku, ale sú oddelené guľôčkami, ktoré sa odvalujú v súhlasných závitových dráhach. Počet styčných závitov skrutky býva 2 až 7 podľa požadovanej nosnosti. Guľôčky opúšťajúce aktívnu dĺžku závitov sú pri vzájomnom natáčaní skrutky a matice usmerňované do spájacieho kanála a vracajú sa na začiatok dráhy. Vzniká tak jeden alebo viac recirkulačných systémov, kde podľa vzájomného zmyslu rotácie skrutky a matice obiehajú guľôčky v jednom alebo v druhom smere. Prepočet charakteristických veličín lineárneho a rotačného pohybu závitovkového prevodu:

Vzťah medzi momentom M a silou F pôsobiaceou na skrutke

$$M = F \frac{s}{2\pi} \quad (77)$$

Vzťah medzi uhlovou rýchlosťou ω a lineárnou rýchlosťou v

$$\omega = v \frac{2\pi}{s} \quad (78)$$

Planétové prevodovky

Planétové prevodovky sú kompaktné pohonné jednotky, ich výhodou je malý objem pri vysokom prenášanom výkone, malý moment zotrvačnosti, vysoká torzná tuhosť, účinnosť, veľké dovolené radiálne a axiálne zataženie výstupného hriadeľa, rovnomerný chod, veľký rozsah prevodových čísiel do pomaly, vstupný a výstupný hriadeľ je súosový, smer otáčania výstupného hriadeľa je zhodný so vstupným.

Dynamické modely mechanických systémov

Mechanický systém je dynamický systém zabezpečujúci pohyb alebo transformáciu momentov a síl. Cieľom analýzy systému z kybernetického hľadiska je zostaviť dynamický model systému na riadenie. Pri zostavovaní modelu sa využíva:

- fyzikálny prístup pri tvorbe modelov: mechanika, teória elektrických strojov, elektronika (riadiaca a výkonová), teória systémov, teória automatického riadenia, modelovanie a simulácia,
- systémový prístup k tvorbe modelov.

Vyšetrované dynamické systémy môžu byť spojité alebo diskrétné. Spojitý systém je lineárny dynamický viacrozmerný systém

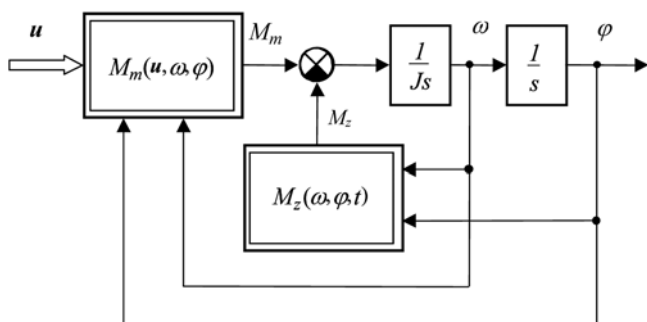
$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \quad (79)$$

alebo nelineárny dynamický viacrozmerný systém.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad y = g(x, u) \quad (80)$$

Všeobecný tvar linearizovaného modelu

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= A\Delta x + B\Delta u & \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u \\ f(x_0, u_0) &= 0 & y_0 &= g(x_0, u_0) \end{aligned} \quad (81)$$



Obr.49 Bloková schéma modelu nelineárneho mechanického systému

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} & \mathbf{B} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \\ \mathbf{C} &= \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} & \mathbf{D} &= \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \end{aligned} \quad (82)$$

Nelineárny dynamický model mechanického systému možno zostaviť z dynamickej rovnice, zovšeobecneného vzťahu pre moment motora a záťažnej charakteristiky.

Dynamický model mechanického systému možno tiež chápať vzhľadom na definovanie riadiacich veličín ako model nelineárneho elektromechanického systému bez uvažovania elektromagnetických prechodných dejov. Model je opísaný týmito rovnicami:

$$\begin{aligned} M_m(U, \omega, \varphi) - M_z(\omega, \varphi, t) &= J \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (83)$$

Príklad

Vyšetrit' podmienky stability sústavy jednosmerný motor – záťaž JM-Z z linearizovaného modelu.

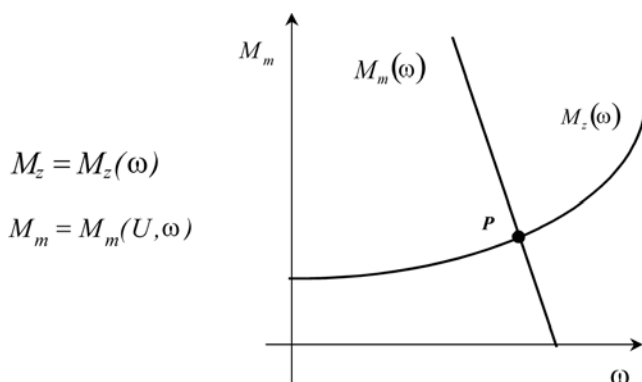
Dynamická rovnica systému (83) sa upraví na tvar

$$M_m(U, \omega) - M_z(\omega) = J \frac{d\omega}{dt} \quad (84)$$

Nelineárny model možno linearizáciou pomocou vzťahov (81) a (82) upraviť. V pracovnom bode $P = [U_o, \omega_o, M_{zo}]$ nech pre veličiny platí

$$\begin{aligned} M_m &= M_{mo} + \Delta M_m \\ M_z &= M_{zo} + \Delta M_z \\ U &= U_o + \Delta U \\ \omega &= \omega_o + \Delta \omega \end{aligned} \quad (85)$$

Nelineárny model (84) sa linearizáciou rozloží na dve zložky, v okolí zvoleného pracovného bodu získame linearizovaný dyna-



Obr.50 Statické momentové charakteristiky sústavy jednosmerný motor – záťaž

mický model a algebraickú rovnicu, ktorej riešením dostaneme hodnoty stavových veličín v pracovnom bode.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_m}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial M_m}{\partial \omega} \Delta \omega - \frac{\partial M_z}{\partial \omega} \Delta \omega &= J \frac{d\Delta \omega}{dt} \\ M_{mo}(U_o, \omega_o) - M_{zo}(\omega_o) &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

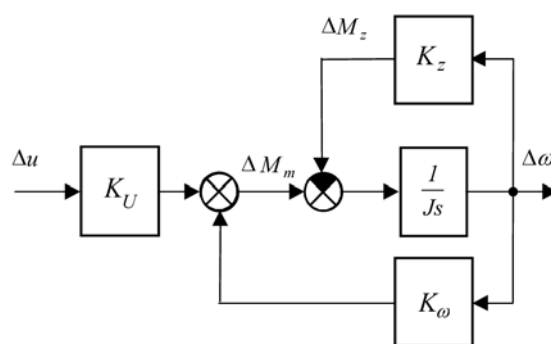
kde

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{\partial M_m}{\partial U} \\ K_\omega &= \frac{\partial M_m}{\partial \omega} \quad K_z = \frac{\partial M_z}{\partial \omega} \end{aligned} \quad (87)$$

Zavedením zosilnení, ktoré predstavujú hodnoty parciálnych derivácií v pracovnom bode, získame upravený linearizovaný model

$$\begin{aligned} K_U \Delta U + K_\omega \Delta \omega - K_z \Delta \omega &= J \frac{d\Delta \omega}{dt} \\ M_{mo}(U_o, \omega_o) - M_{zo}(\omega_o) &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

Model (88) predstavuje lineárny dynamický model sústavy 1. rádu. Môžeme ho vyjadriť pomocou blokovej schémy obr. 51.



Obr.51 Bloková schéma modelu linearizovaného systému jednosmerný motor – záťaž

Dynamické vlastnosti možno vyjadriť formou prenosovej funkcie

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \omega(s)}{\Delta U(s)} &= \frac{K_m}{1 + T_m s} \\ K_m &= \frac{K_U}{K_z - K_\omega} \quad T_m = \frac{J}{K_z - K_\omega} \end{aligned} \quad (89)$$

Podmienka stability linearizovaného mechanického systému je potom vyjadrená vzťahom

$$\text{ak } T_m = \frac{J}{K_z - K_\omega} > 0 \quad \text{potom} \quad \frac{\partial M_z}{\partial \omega} - \frac{\partial M_m}{\partial \omega} > 0 \quad (90)$$

Dynamické modely zložitých mechanických systémov

Pohybové rovnice jednoduché hmotnej sústavy pohybujúcej sa rotačne alebo translačne (lineárne) možno odvodiť z druhého Newtonovho zákona a d'Alambertovho princípu. Pre zložitejšie mechanické sústavy nemožno jednoducho zostaviť výslednú pohybovú rovnicu. Na zostavenie dynamického modelu mechanického systému možno použiť viaceré prístupy, napr.:

- metódu redukcie síl a hmotnosti,
- metódu Lagrangeových rovníc II. druhu.

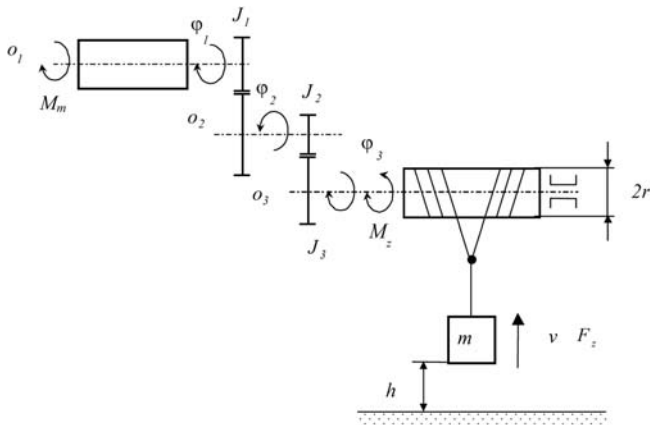
Metóda redukcie síl a hmotnosti

Princíp metódy je založený na myšlienke, že celú sústavu možno nahradiť jediným fiktívnym telesom s náhradnou hmotnosťou, na ktorú prevedieme účinky všetkých síl pôsobiach na sústavu. Podmienky redukcie síl, momentu a hmotností alebo momentu zotrvačnosti možno odvodiť tak, že píšeme priamo pohybovú rovnicu, v ktorej vystupuje redukovaná hmotnosť alebo redukovaný moment zotrvačnosti a redukovaná sila alebo moment. Pre systém platí zákon zachovania energie.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \text{energia} \\ \text{uchovaná} \\ \text{v systéme} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \text{externe} \\ \text{dodaný} \\ \text{výkon} \end{bmatrix} - \sum \begin{bmatrix} \text{výkon} \\ \text{spotrebovaný} \\ \text{vo vnútri systému} \end{bmatrix}$$

Príklad

Zostaviť pohybovú rovnicu zdvíhacieho zariadenia žeriavu – mačky s jedným stupňom voľnosti, obr. 52 (J_1, J_2, J_3 – sú celkové momenty zotrvačností osí $0_1, 0_2, 0_3$).



Obr.52 Bloková schéma modelu sústavy zdvíhacieho zariadenia žeriavu – mačky

Pre sústavu platí táto pohybová rovnica vzhľadom na os pohybu 0_1

$$M_m - M_{zred} = J_{red} \frac{d\omega_1}{dt}$$

$$\text{kde } \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (91)$$

Kinetická energia sústavy podľa schémy na obr. 49

$$W_k = \frac{1}{2} J_{red} \omega_1^2 = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 + m v^2)$$

$$W_k = \frac{1}{2} \left(J_1 + J_2 \frac{1}{i_{12}^2} + J_3 \frac{1}{i_{13}^2} + m r^2 \frac{1}{i_{13}^2} \right) \omega_1^2 \quad (92)$$

$$\text{kde } i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad v = \omega_3 \cdot r \quad (93)$$

$$\text{potom } J_{red} = J_1 + J_2 \frac{1}{i_{12}^2} + J_3 \frac{1}{i_{13}^2} + m r^2 \frac{1}{i_{13}^2} \quad (94)$$

$$M_{zred} = (M_z + mgr) \frac{1}{i_{13}} \quad (95)$$

Metóda Lagrangeových rovníc II. druhu

Základné vlastnosti metódy:

- počet rovníc je daný stupňom voľnosti hmotného telesa,
- rovnice platia pre holonomny (tuhý) systém,
- metóda nezávisí od konkrétneho usporiadania sústavy.

Mechanický systém s n stupňami voľnosti má zovšeobecnené súradnice (napr. polohu) vyjadrené stavovým vektorom

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (96)$$

Konzervatívny systém s pôsobiacimi vonkajšími silami sa dá opísať týmito pohybovými rovnicami vo vektorovom tvare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \mathbf{q}')}{\partial \mathbf{q}'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (97)$$

kde L je Lagrangeova funkcia – lagrangián,

$\mathbf{q}'$ – derivácia stavového vektora

$q'_i = \frac{dq_i}{dt}$ – derivácia i -tej zložky stavového vektora

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = W_k(\mathbf{q}, \mathbf{q}') - W_p(\mathbf{q}) - \sum_{k=1}^m \int_0^t M_k(t) q'_k(t) dt$$

$$Q = \sum_{k=1}^m \int_0^t M_k(t) q'_k(t) dt \quad (98)$$

kde W_k je kinetická energia systému,

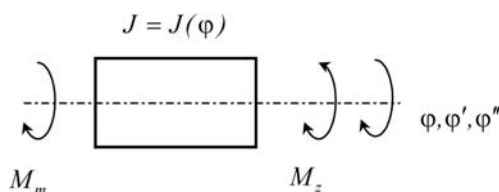
W_p – potenciálna energia systému,

M_k – vonkajšie momenty,

Q – virtuálna práca vonkajších síl, momentov.

Príklad

Zostaviť pohybovú rovnicu rotačného telesa obr. 53 s premenlivým momentom zotrvačnosti s jedným stupňom voľnosti pomocou metódy Lagrangeových rovníc II. druhu.



Obr.53 Mechanický rotačný systém s jedným stupňom voľnosti

Podľa uvedených rovníc platí

$$i = 1 \quad q_1 = \phi \quad (99)$$

$$W_k = \frac{1}{2} J(\phi) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (100)$$

$$\frac{dQ}{dt} = (M_m - M_z) \frac{d\phi}{dt} \quad (101)$$

$$L(\phi, \phi') = W_k - Q = \frac{1}{2} J(\phi) \phi'^2 - \int_0^t (M_m - M_z) \phi' dt \quad (102)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi' \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \phi'' \quad (103)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi'} = J(\phi) \phi' - \int_0^t (M_m - M_z) dt \quad (104)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial J(\phi)}{\partial \phi} \phi'^2 \quad (105)$$

Po úprave dostaneme výsledný tvar Lagrangeovej rovnice

$$J(\phi) \phi'' + \frac{\partial J(\phi)}{\partial \phi} \phi'^2 - (M_m - M_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial J(\phi)}{\partial \phi} \phi'^2 = 0 \quad (106)$$

$$J(\phi) \phi'' + \frac{1}{2} \frac{\partial J(\phi)}{\partial \phi} \phi'^2 = M_m - M_z = M_d \quad (107)$$

$$\text{Ak } J = \text{konst} \quad \text{potom } J \phi'' = M_d \quad (108)$$

Ing. Ján Jovankovič, PhD.

prof. Ing. Milan Žalman, PhD.

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra automatizácie a regulácie
Ilkovičova 3, 842 47 Bratislava
e-mail: jan.jovankovic@stuba.sk
milan.zalman@stuba.sk