Základné problémy návrhu robustných regulátorov pre sieťové riadiace systémy

V príspevku sú uvedené základné otázky návrhu robustných regulátorov pre sieťové riadiace systémy. Neurčitý objekt riadenia uvažujeme v tvare polytopického systému. Na návrh robustného regulátora sú uvedené postačujúce podmienky stability s garantovanou kvalitou regulácie.

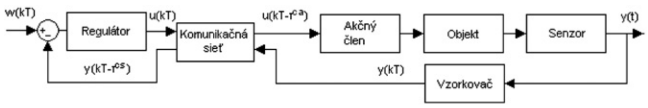
1. Úvod

Rozvojom komunikačných sietí (KS) sa veľká pozornosť začína venovať riadeniu dynamických systémov, kde je KS zapojená do spätnej väzby regulačného obvodu. Vzhľadom na neurčitosti v modeloch objektu riadenia a existenciu premenlivého dopravného oneskorenia v KS významnú úlohu zohráva návrh robustných regulátorov pre sieťové riadiace systémy. Dynamický model objektu riadeného cez KS možno opísať týmto systémom diferenciálnych rovníc:

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + [A_d + \Delta A_d]x(t - \tau(t))$$
$$x(t) = \phi(t) \qquad t \in <-\tau(t), 0> \qquad 0 \le \tau(t) \le \tau_M \tag{1}$$

kde $x(t) \in R^n$ je stavový vektor objektu,
A, A_d sú známe matice vhodných rozmerov,
ΔA, ΔA_d sú neznáme matice, ktoré reprezentujú časovo premenlivú, ale ohraničenú neurčitosť a
$\tau(t)$ je časovo závislé dopravné oneskorenie stavu objektu.

V sieťových riadiacich systémoch (NCS – Networked Control System) vznikajú problémy so zabezpečením stability a kvality riadenia v dôsledku vzniku v komunikačnom systéme časovo premenlivého dopravného oneskorenia (obr. 1).

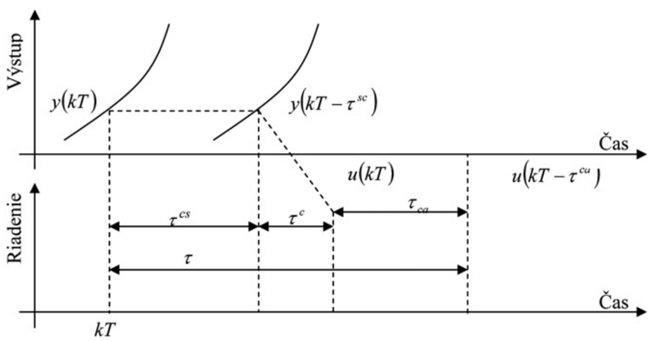


Obr.1 Sieťový riadiaci systém

NCS pracuje cez KS. Pri prenose údajov cez KS vždy dochádza k premenlivému dopravnému oneskoreniu alebo až k strate prenášanej informácie. Hlavnými oneskoreniami v regulačnom obvode sú:

τ^{cs} – oneskorenie medzi senzorom (výstupom z objektu a regulátorom),
τ^{ca} – oneskorenie medzi regulátorom a akčným členom,
τ_c – oneskorenie samotného regulátora.

Čas oneskorenia vidno na obr. 2.



Obr.2 Dopravné oneskorenia v NCS

Prvé dve dopravné oneskorenia sú premenlivé a môžu, ale nemusia byť dlhšie, ako je perióda vzorkovania. Označíme ich $\tau(t) = \tau^{cs}(t) + \tau^{c} + \tau^{ca}(t)$. Predpokladajme, že dopravné oneskorenia sú ohraničené. Potom platí:

$$0 \le \tau(t) \le \tau_M \qquad \dot{\tau}(t) \le d$$

Nech riadenie dynamického systému (1) bez neurčitostí sa uskutoční cez KS. Model objektu riadenia je:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t - \tau(t)) \tag{2}$$

pre algoritmus riadenia:

$$u(t) = FCx(t - \tau(t)) \tag{3}$$

model uzavretého regulačného obvodu je:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFCx(t - \tau(t)) \tag{4}$$

Z (4) vidno, že ak $A_d = BFC$, dostaneme pre nominálny model opis objektu riadenia v tvare (1). Uskutočníme analýzu stability a návrh robustného regulátora pre NCS.

Model neurčitostí objektu riadeného cez KS vyberieme v tvare polytopického systému. Predpokladáme, že v (1) platí $\Delta A = \Delta A_d = 0$ a model neurčitostí je v tvare:

$$[A, A_d] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i [A_i, A_{di}] \qquad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \qquad 0 \le \lambda_i \le 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{5}$$

Analýzu stability a návrh robustného regulátora pre model (4) a (5) uskutočníme pomocou Lyapunovovej teórie stability a Lyapunovovu funkciu vyberieme v tvare Lyapunovho-Krasovského funkcionálu (LKF). Uvedieme krátky prehľad v literatúre používaných LKF.

$$V_1(t) = x(t)^T Px(t)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^T Px(t) + x(t)^T P\frac{dx(t)}{dt}$$

$$V_2(t) = \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \tau(s)/2) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \tau(s)/2) \end{bmatrix} ds$$

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau/2) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau/2) \end{bmatrix} - (1 - d/2)$$

$$\begin{bmatrix} x(t - \tau/2) \\ x(t - \tau/2 - \frac{\tau(t - \tau(t)/2}{2} \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(t - \tau/2 \\ x(s - \tau/2 - - \frac{\tau(t - \tau(t)/2)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} <= d < 2$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau(t)}^{t} x(s)^T Gx(s) ds$$

$$\frac{dV_3(t)}{dt} = x(t)^T Gx(t) - (1-d)x(t-\tau(t))^T Gx(t-\tau(t))$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} <= d < 1$$

$$V_4(t) = \int\limits_{t-\frac{t_M}{2}}^{t} \int\limits_{s}^{t} \dot{x}(t)^T (u) R_1 \dot{x}(t) duds$$

$$\dot{V}_4(t) \le \frac{\tau_M}{2} \dot{x}(t)^T R_1 \dot{x}(t) - \frac{2}{\tau_M} x(t)^T R_1 w(t)$$

$$w(t) = x(t) - x\left(t - \frac{\tau(t)}{2}\right)$$

$$V_5(t) = \int\limits_{t-t_M}^{t} \int\limits_{s}^{t} \dot{x}(t)^T (u) R_o \dot{x}(t) duds$$

$$\dot{V}_5(t) \le \tau_M \dot{x}(t)^T R_o \dot{x}(t) - \frac{1}{\tau_M} v(t)^T R_o v(t)$$

$$v(t) = x(t) - x(t-\tau(t))$$

Leibnitzova-Newtonova rovnica:

$$x(t) - x(t-\tau(t)) = \int\limits_{t=-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s) ds$$

2. Analýza stability polytopických systémov s dopravným oneskorením

Pre najjednoduchší prípad Lyapunov -Krasovského funkcionál vyberieme v tvare:

$$V(t) = V_1(t) + V_3(t) \tag{6}$$

kde

$$V_1(t) = x(t)^T Px(t) \qquad V_3(t) = \int\limits_{t-\tau}^{t} x(s)^T Gx(s) ds$$

$$P = P^T > 0 \qquad G = G^T > 0$$

Časová derivácia (6)

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \tag{7}$$

kde

$$\dot{V}_1(t) = \dot{x}^T(t) Px(t) + x(t)^T P\dot{x}(t)$$

$$\dot{V}_3(t) = \int\limits_{t-\tau}^{t} \frac{\partial}{\partial t}(x(s)^T Gx(s)) ds$$

$$= x(t)^T Gx(t) - (1-\dot{\tau})x(t-\tau)^T Gx(t-\tau)$$

Na základe Leibnitzovej-Newtonovej rovnice upravíme poslednú rovnicu takto:

$$\dot{V}_3(t) = (1-d)(x(t)^T Gx_1(t) + x_1(t)^T Gx(t) - x_1(t)^T Gx_1)) +$$

$$+ dx(t)^T Gx(t)$$

$$x_1(t) = \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s) ds$$

Definujme nový stavový vektor

$$z(t)^T = \left[\dot{x}(t)^T x(t)^T x_1(t)^T\right]$$

potom časovú deriváciu (7) možno zapísať takto:

$$\dot{V}(t) = z(t)^T \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & dG & (1-d)G \\ 0 & (1-d)G & -G(1-d) \end{bmatrix} z(t) \tag{8}$$

Zavedieme zvoliteľné matice $N_i \in R^{nxn}$, $i = 1, 2, 3$ takto:

$$2\left[\dot{x}(t)^T N_1 + x(t)^T N_2 + x_1(t)^T N_3\right]$$
$$\left[\dot{x}(t) - (A + A_d)x(t) + A_d x_1(t)\right] = 0 \tag{9}$$

Po úprave (9) sa získaný výsledok pripočíta k (8) a dostaneme:

$$\dot{V}(t) = z(t)^T Wz(t) \tag{10}$$

kde

$$W = \begin{bmatrix} N_1^T + N_1 & P - N_1 A_c + N_2^T & N_1 A_d + N_3 \\ * & dG - N_2 A_c - A_c^T N_2 & N_2 A_d - A_c^T N_3^T + (1-d)G \\ * & * & -(1-d)G + N_3 A_d + A_d^T N_3^T \end{bmatrix}$$

a

$$A_c = A + A_d$$

Z rovnice (10) vidno, že ak je matica W záporne definitná (semidefinitná), potom dynamický systém (4) s dopravným oneskorením je asymptoticky stabilný (stabilný). Zaujímavé je, že matica W nie je funkciou veľkosti maximálnej hodnoty dopravného oneskorenia τ_M, preto ak platí $W < 0$, systém bude asymptoticky stabilný pri ľubovoľne veľkom dopravnom oneskorení (stabilita nezávisí od dopravného oneskorenia). Polytopický systém (5) dosadíme do (10):

$$\left[A_c, A_d, P, G\right] = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[A_{ci}, B_i FC, P_i, G_i\right] \tag{11}$$

a dostaneme LMI podmienku na analýzu stability polytopického systému v tvare:

$$W_i =$$

$$\begin{bmatrix} N_1^T + N_1 & P_i - N_1 A_{ci} + N_2^T & N_1 B_i FC + N_3 \\ P_i - A_{ci}^T N_1^T + N_2 & dG_i - N_2 A_{ci} - A_{ci}^T N_2^T & N_2 B_i FC - A_{ci}^T N_3^T + (1-d)G_i \\ (B_i FC)^T N_1^T + N_3^T & (B_i FC)^T N_2^T - N_3 A_{ci} + (1-d)G_i & -(1-d)G_i + N_3 B_i FC + (B_i FC)^T N_3^T \end{bmatrix}$$

$$< 0$$

$$i = 1,2,\ldots,N \tag{12}$$

Pre prípad konštantného dopravného oneskorenia

$$0 \le \tau = const \qquad \tau(t) = d = 0$$

treba v nerovnosti (12) dosadiť $d = 0$. Postačujúce podmienky stability (12) možno zmierniť rozšírením LKF o ďalší člen (ďalšie členy). Ukážeme to na príklade návrhu robustného regulátora pre systém s dopravným oneskorením.

3. Návrh robustného PI regulátora pre systém s dopravným oneskorením

Pre polytopický dynamický systém (2) treba navrhnúť robustný PI regulátor s algoritmom riadenia:

$$u(t) = K_p Cx(t-\tau) + K_i C_i \int\limits_{0}^{t} x(t-\tau) dt \tag{13}$$

Označme

$$\dot{z}(t) = C_i x(t-\tau)$$

$$v = \left[x(t)^T \quad z(t)^T\right]^T$$

a na základe L-N rovnice možno algoritmus riadenia upraviť takto:

$$u(t) = \left[K_p C \quad K_i\right] \ v(t) - \left[K_p C \quad 0\right] v_1(t)$$

Polytopický systém (2) s algoritmom riadenia je:

$$\dot{v}(t) = \begin{bmatrix} A(\lambda) + B(\lambda)K_p C & B(\lambda)K_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix} v(t) - \begin{bmatrix} B(\lambda)K_p C & 0 \\ C_i & 0 \end{bmatrix} v_1(t)$$

$$v_1(t) = \int\limits_{t-\tau}^{t} \dot{v}(s) ds \tag{14}$$

alebo:

$$\dot{v}(t) = A_c(\lambda)v(t) - B_p(\lambda)v_1(t)$$

Na návrh robustného regulátora vyberme LKF v tvare:

$$V(t) = V_1(t) + V_3(t) + \tau_M V_5(t)$$

Ak označíme

$$z(t) = \begin{bmatrix} \dot{v}(t)^T & v(t)^T & v_1(t)^T \end{bmatrix}^T$$

časová derivácia LKF je v tvare:

$$\dot{V}(t) \leq z(t)^T \begin{bmatrix} \tau_M^2 R_o & P & 0 \\ P & dG & (1-d)G \\ 0 & (1-d)G & -(1-d)G - R_o \end{bmatrix} z(t) \tag{15}$$

Kriteriálnu funkciu vyberme takto:

$$J = \int_{t_o}^{\infty} J(t)dt \tag{16}$$

kde

$$J(t) = v(t)^T Qv(t) + u(t)^T Ru(t) = v(t)^T Qv(t) + \\ + \left[v(t)^T \begin{bmatrix} K_pC & K_i \end{bmatrix}^T - v_1(t)^T \begin{bmatrix} K_pC & 0 \end{bmatrix}^T\right] R \\ \left[\begin{bmatrix} K_pC & K_i \end{bmatrix} v(t) - \begin{bmatrix} K_pC & 0 \end{bmatrix} v_1(t)\right]$$

Po malej úprave dostaneme:

$$J(t) = z(t)^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q + K_1^T RK_1 & -K_1^T RK_2 \\ 0 & -K_2^T RK_1 & K_2^T RK_2 \end{bmatrix} z(t) \tag{17}$$

kde

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_pC & K_i \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} K_pC & 0 \end{bmatrix}$$

Definujme matice:

$$M = \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T \end{bmatrix}^T$$
$$Sys = \begin{bmatrix} I & -A_c(\lambda) & B_p(\lambda) \end{bmatrix}$$

potom maticová podmienka na návrh robustného riadenia polytopického systému s dopravným oneskorením je:

$$B_e = z(t)^T 2M\,Sys\,z(t) + J(t) + \dot{V}(t) = z(t)^T W_c z(t) \leq 0 \tag{18}$$

alebo po roznásobení pre W_c dostaneme bilineárnu maticovú nerovnosť (BMI) ako podmienku na návrh robustného PI regulátora v tvare:

$$W_c = \{w_{ij}\}_{3x3} \leq 0 \tag{19}$$

$$w11 = N_1 + N_1 + \tau_M^2 R_o(\lambda)$$
$$w12 = P(\lambda) - N_1 A_c(\lambda) + N_2^T$$
$$w13 = N_1 B_p(\lambda) + N_3^T$$
$$w22 = dG(\lambda) + Q + K_1^T RK_1 - N_2 A_c(\lambda) - A_c(\lambda)^T N_2^T$$
$$w33 = -(1-d)G(\lambda) - R_o(\lambda) + N_3 B_p(\lambda) + B_p(\lambda)^T N_3^T$$
$$w32 = (1-d)G(\lambda) - K_2^T RK_1 - N_3 A_c(\lambda) + B_p(\lambda)^T N_2^T$$

Ak existuje riešenie bilineárnej maticovej nerovnice (19) vzhľadom na neznáme premenné

$$0 < P(\lambda) = P(\lambda)^T \leq \rho I$$
$$0 < G(\lambda) = G(\lambda)^T \leq \rho I, 0 < R_o(\lambda) = R_o(\lambda)^T \leq \rho I, K_p, K_i, N_1, N_2, N_3$$

potom navrhnutý regulátor zabezpečuje robustné vlastnosti URO a má garantovanú kvalitu regulácie v celom rozsahu zmien parametrov objektu s dopravným oneskorením. Na zmiernenie postačujúcich podmienok stability treba rozdeliť veľkosť dopravného oneskorenia aspoň na dve časti (použiť $V_2(t)$, $V_4(t)$) a rozšíriť LKF o ďalšie zložky Lyapunovovej funkcie.

4. Záver

V príspevku je uvedený krátky prehľad možností návrhu robustných regulátorov pre sieťové riadiace systémy. Neurčitý objekt riadenia uvažujeme v tvare polytopického systému. Na návrh robustného regulátora sú uvedené postačujúce podmienky parametricky závislej kvadratickej stability s garantovanou kvalitou regulácie. Ďalej sú ukázané možnosti zníženia konzervativizmu navrhnutých metód.

Literatúra

[1] LI YU, JIAN CHU: An IMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. Automatica, 35, (1999), 1 155 – 1 159.

[2] WU-HUA CHEN, ZHI HONG GUAN, XIAOMEI LU: Delay-dependent output feedback guaranteed cost control for uncertaintime-delay. Automatica, 40, (2004), 1 263 – 1 268.

[3] BOHYUNG LEE, JANG GYU LEE: Robust stability and stabilization of linear delayed systems with s structured uncertainty. Automatica, 35 (1999), 1 149 – 1 154.

[4] LIXIAN ZHANG, EL-KEBIR BOUKAS, AHMAD HAIDAR: Delay range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation. Automatica, 44, (2008) 2 691 – 2 695.

[5] VLADIMIR L. KHARITONOV, DANIEL MELCHOR-AGUILAR: On delay-dependent stability conditions. Systems and Control Letters, 40, (2000), 71 – 76.

[6] XIANGUI LIU, WUWEI CHENG: Improved parameter-dependent robust stability criteria for time-delay systems with polytopic uncertainties. ICIC Int. V.5 N4, (2009), 923 – 930.

[7] XIEFU JIANG, QING-LONG HAN: New stability criteria for linear systems with interval time-delay systems. Automatica, 44, (2008), 2 680 – 2 685.

[8] JEAN-PIERRE RICHARD: Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. Automatica, 39, (2003), 1 667 – 1 694.

[9] VOJTECH VESELÝ, LADISLAV HARSÁNYI: Robustné riadenie dynamických systémov, STU Bratislava (2008).

prof. Ing. Vojtech Veselý, DrSc.

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Ústav riadenia a priemyselnej informatiky
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
Tel.: 02/60 29 11 11
Fax: 02/60 29 11 11
e-mail: vojtech.vesely@stuba.sk