Príspevok k automatickému zostavovaniu pohybových rovníc priestorových otvorených kinematických reťazcov

Darina Hroncová

Abstrakt
V práci je popísaný algoritmus na automatické zostavovanie pohybových rovníc. Pri ich zostavovaní sa používajú Lagrangeove rovnice II.druhu a transformačné matice základných pohybov. Tento prístup je vhodný pri počítačovej simulácii otvorených kinematických reťazcov s ľubovoľným počtom stupňov voľnosti a s ľubovoľnou kombináciou väzieb.

Kľúčové slová: otvorené kinematické reťazce, kinematická a dynamická analýza, Lagrangeove rovnice

Úvod

Stroje a zariadenia sú vo všeobecnosti sústavy telies, ktoré sú navzájom pospájané rôznymi väzbami. Podľa spôsobu ako sú telesá spojené vznikajú sústavy s rôznym rozsahom pohyblivosti. Mechanizmy priemyselných robotov a manipulátorov predstavujú navzájom spojené sústavy telies, ktoré vytvárajú rôzne druhy kinematických reťazcov. Mechanizmy robotov sú najčastejšie vytvárané ako otvorené respektíve zmiešané kinematické reťazce. Dva členy, ktoré sú navzájom pohyblivo viazané, a to tak, že pohyblivosť jedného voči druhému je obmedzená, tvoria kinematickú dvojicu. Jednotlivé členy kinematických reťazcov sú navzájom spojené translačnými alebo rotačnými kinematickými dvojicami. Pri navrhovaní mechanizmov je potrebný spoľahlivý výpočet príslušných mechanických veličín, ktoré potom umožňujú ďalšie dimenzovanie jednotlivých častí.

Príspevok sa zaoberá teóriou jednoduchých otvorených kinematických reťazcov, ktorá sa využíva pri kinematickej a dynamickej analýze rôznych manipulátorov a robotov. Ručné zostavovanie a nasledovné riešenie matematických modelov je náročné. Nástup výpočtovej techniky viedol k rozvoju počítačových metód aj v oblasti zložitých priestorových mechanických sústav, čo postupne viedlo k ich počítačovému navrhovaniu (CAD).

V oblasti počítačovej analýzy, syntézy a optimalizácie mechanických sústav (MBS – multibody systems) v súčasnosti existuje veľmi bohatá literatúra,v ktorej môže čitateľ nájsť podrobný popis mnohých maticových počítačových metód statickej, kinematickej a dynamickej analýzy, metódy numerického riešenia matematických modelov (diferenciálnych, algebro-diferenciálnych a iných), ale tiež aj popis metód riadenia a optimalizácie napr. literatúru [1] až [9]. V príspevku je popísaný spôsob zostavovania pohybových rovníc otvorených kinematických reťazcov pomocou Lagrangeových rovníc II.druhu v maticovom tvare a transformačných matíc základných pohybov, na základe ktorého je možná počítačová simulácia otvorených kinematických reťazcov s ľubovoľným počtom stupňov voľnosti a s ľubovoľnou kombináciou väzieb.

Systém je uvažovaný ako sústava tuhých telies, kinematické dvojice ako ideálne bez pasívnych odporov a bez vôli. Pomocou transformačných matíc základných pohybov [1] sa vytvorí ľubovoľný tvar modelu manipulátora, pre ktorý sa zostaví sústava príslušných pohybových rovníc. Zostavené pohybové rovnice sa môžu ďalej riešiť pomocou numerických metód.

Použité označenie

$\mathbf{q}$ - zovšeobecnená súradnica,

$\dot{\mathbf{q}}$ - zovšeobecnená rýchlosť,

$\mathbf{Q}$ - zovšeobecnená sila,

$\mathbf{B_i}$ - transformačná matica určujúca vzťah medzi súradnicovým systémom člena i a základom 0,

$\mathbf{r}_i$ - rozšírený vektor polohy ťažiska člena i v súradnicovom systéme tohoto člena,

$\mathbf{B_i^j}$ - parciálna derivácia matice $\mathbf{B_i}$ podľa $\mathbf{q}_j$,

$\mathbf{B_i^{jk}}$ - parciálna derivácia matice $\mathbf{B_i^j}$ podľa $\mathbf{q}_k$,

$S(.)$ - stopa matice $(.)$,

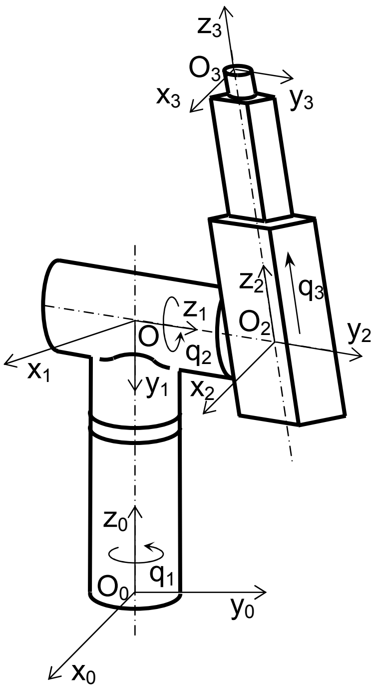
$\mathbf{I_i}$ - matica momentov zotrvačnosti člena i,

m_i - hmotnosť člena i,

g - gravitačné zrýchlenie.

Zostavenie pohybových rovníc

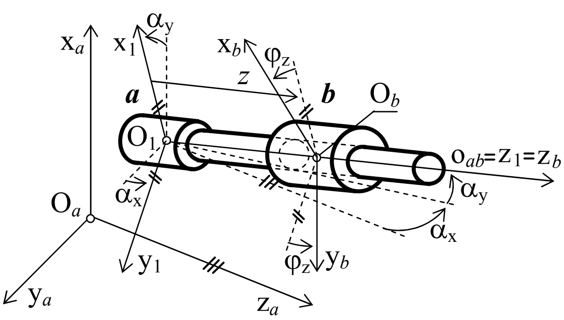
Pohyb jednoduchých otvorených priestorových kinematických reťazcov, ku ktorým patria často aj mechanizmy priemyselných robotov a manipulátorov, sa vyšetruje na základe teórie súčasných pohybov.



Obr.1 Manipulátor s tromi stupňami voľnosti pohybu

Fig.1 Manipulator with three degrees of freedom

Poloha každého člena je určená v globálnom súradnicovom systéme pomocou lokálnych súradnicových systémov spojených s jednotlivými členmi $O_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$. Súradnicový systém i-teho člena O_i, x_i, y_i, z_i vzhľadom na súradnicový systém ($i-1$)–vého člena $O_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ je posunutý respektíve pootočený okolo osi predchádzajúceho člena (obr.1). Táto transformácia sa robí pomocou transformačných matíc základných pohybov [1]. Napriklad v telese b je zvolený súradnicový systém tak, že os pohybu $o_{ab} = z_b$ (obr.2). Súradnicový systém telesa b pôvodne splýval so systémom telesa a. Do svojej všeobecnej polohy sa dostal pemiestnením do polohy $O_1, x_1, y_1, z_1 = o_{ab}$ a posunutím v smere osi $o_{ab} = z_b$ o dĺžku z a ešte pootočením okolo tejto osi o uhol φ_z. Uvedená dvojica má 2° voľnosti a za súradnice zvolíme posunutie z v smere osi o_{ab} a pootočenie φ_z okolo tejto osi. Potom transformačná matica je v tvare $\mathbf{T}_{ab} = \mathbf{T}_1\, \mathbf{T}_{Z3}(z)\, \mathbf{T}_{Z6}(\varphi_z)$, kde matica $\mathbf{T}_1$ bude v tvare $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{Z1}(x_0)\, \mathbf{T}_{Z2}(y_0)\, \mathbf{T}_{Z3}(z_0)\, \mathbf{T}_{Z4}(\alpha_x)\, \mathbf{T}_{Z5}(\alpha_y)$, lebo systém 1 pôvodne splýval so systémom a a do svojej polohy sa dostal posunutím o x_0, y_0, z_0 v smere osí x_a, y_a, z_a, pootočením okolo posunutej osi x_a o uhol α_x a pootočením okolo okamžitej polohy osi $y_a = y_1$ o uhol α_y (obr.2).



Obr.2 Súradnicové systémy

Fig.2 Coordinate systems

Každý pohyb telesa sa dá zložiť z príslušných základných pohybov a transformačná matica $\mathbf{T}_{ab}$ takého zloženého pohybu sa vyjadrí ako súčin transformačných matíc základných pohybov. Konštantné posunutia a pootočenia v kinematickej dvojici sú popísané konštantnými transformačnými maticami základných pohybov. Všetky transformačné matice kinematických dvojíc s jedným stupňom voľnosti pohybu sú dané súčinom dvoch matíc, matice konštantnej a matice premennej. Derivácie transformačných matíc základných pohybov možno nahradiť násobením týchto matíc maticovým diferenciálnym operátorom označeným $\mathbf{D}_{Z1}, \mathbf{D}_{Z2}, \mathbf{D}_{Z3}, \mathbf{D}_{Z4}, \mathbf{D}_{Z5}, \mathbf{D}_{Z6}$ [1].

Pri riešení dynamiky kinematických reťazcov sa využívajú Lagrangeove rovnice II.druhu . Na jednoznačné určenie okamžitej polohy je potrebné poznať n zovšeobecnených súradníc $q_1, q_2, \dots, q_n$. Po príslušných úpravách sa zostavia pohybové rovnice v tvare [2]:

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=1}^{i} S\left(\mathbf{B}_i^{j}\mathbf{I}_i\mathbf{B}_i^{kT}\right)\ddot{q}_j + \sum_{i=k}^{n}\sum_{j,l=1}^{i} S\left(\mathbf{B}_i^{jl}\mathbf{I}_i\mathbf{B}_i^{kT}\right)\dot{q}_j\dot{q}_l - g\left(\mathbf{\Theta}_3, \sum_{i=k}^{n} m_i\mathbf{B}_i^{k}\mathbf{r}_i\right) = Q_k, \tag{1}$$

alebo

$$\sum_{i=1}^{n} a_{0k}^{i}\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{1k}^{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i + a_{2k} = \mathbf{Q}_k, \qquad k = 1,\dots,n. \tag{2}$$

Sústava n viazaných nelineárnych diferenciálnych rovníc (2) vyjadrujúca dynamické vlastnosti manipulátora sa môže vyjadriť rovnicou :

$$\mathbf{A}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{a}_{\mathbf{g}} = \mathbf{a}_{\mathbf{F}}, \tag{3}$$

po úprave:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{a}}_{\dot{\mathbf{q}}} - \bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{g}}, \tag{4}$$

kde:

$$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{F}} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{a}_{\mathbf{F}},$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{a}_{\dot{\mathbf{q}}},$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{g}} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{a}_{\mathbf{g}}.$$

Jednotlivé koeficienty v rovnici (2) majú tvar:

$$a_{0k}^{i} = \sum_{l=\max(i,k)}^{n} S\left(\mathbf{B}_l^{i}\mathbf{I}_l\mathbf{B}_l^{kT}\right), \tag{5}$$

$$a_{1k}^{ji} = \sigma_{ji}\sum_{l=\max(i,j,k)}^{n} S\left(\mathbf{B}_l^{ji}\mathbf{I}_l\mathbf{B}_l^{kT}\right),$$

$$\sigma_{ji} = \begin{cases} 1 ak\ j = i \\ 2 ak\ j \neq i \end{cases} \qquad i,j,k = 1,\dots,n \tag{6}$$

$$a_{2k} = gS\left(\Theta_3\left(\sum_{i=k}^{n} m_i\mathbf{B}_i^{k}\mathbf{r}_i\right)^T\right). \tag{7}$$

kde:

a_{0k}^{i} - sú koeficienty týkajúce sa zrýchlení v kinematických dvojiciach,

a_{1k}^{ji} - sú koeficienty týkajúce sa rýchlostí v kinematických dvojiciach,

a_{2k} - sú koeficienty zohľadňujúce gravitáciu,

$\Theta_3 = [0,0,1,0]^T$,

Podľa [2] je:

$$\mathbf{B_i} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 ... \mathbf{T}_i = \prod_{k=1}^{i} \mathbf{T}_k \,, \qquad i = 1,\dots,n \tag{8}$$

transformačná matica určujúca vzťah medzi súradnicovým systémom člena *i* a vzťažným súradnicovým systémom,

$$\dot{\mathbf{B}}_\mathbf{i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{B_i}}{\partial q_j}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B_i^j}\dot{q}_j \,, \tag{9}$$

je derivácia matice $\mathbf{B_i}$ podľa času,

$$\mathbf{B_i^j} = \frac{\partial \mathbf{B_i}}{\partial q_j} \,, \qquad i,j = 1,\dots,n \tag{10}$$

je parciálna derivácia matice $\mathbf{B_i^j}$ podľa q_j

$$\mathbf{B_i^{jk}} = \frac{\partial \mathbf{B_i^j}}{\partial q_k} \,, \qquad i,j,k = 1,\dots,n \tag{11}$$

je parciálna derivácia matice $\mathbf{B_i^j}$ podľa q_k.

Z vlastností transformačných matíc $\mathbf{T_i}$ dostávame vzťahy:

$$\mathbf{B_i^j} = \mathbf{T_1 ... T_{j-1} D_j T_j T_{j+1} ... T_i} \,, \quad \text{ak } j \le i \,,$$

$$\mathbf{B_i^j} = 0 \,, \quad \text{ak } j > i \,,$$

$$\mathbf{B_i^{jk}} = \mathbf{T_1 ... T_{j-1} D_j T_j ... T_{k-1} D_k T_k ... T_i} \,, \quad \text{ak } j < k \le i$$

$$\mathbf{B_i^{jk}} = \mathbf{T_1 ... T_{j-1} D_j^2 T_j ... T_i} \,, \quad \text{ak } j = k \le i$$

$$\mathbf{B_i^{jk}} = 0, \quad \text{ak } j > i \text{ a } k > i \tag{12}$$

kde: $\mathbf{D_j}, \mathbf{D_k}$ - sú maticové diferenciálne operátory.

Koeficienty týkajúce sa zrýchlenia sú vyjadrené symetrickou maticou $\mathbf{A_0}$ typu $n \times n$:

$$\mathbf{A_0} = \begin{vmatrix} a_{01}^1 & a_{01}^2 & \cdots & a_{01}^i & \cdots & a_{01}^n \\ a_{02}^1 & a_{02}^2 & \cdots & a_{02}^i & \cdots & a_{02}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{0k}^1 & a_{0k}^2 & \cdots & a_{0k}^i & \cdots & a_{0k}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{0n}^1 & a_{0n}^2 & \cdots & a_{0n}^i & \cdots & a_{0n}^n \end{vmatrix} \tag{13}$$

$k,i = 1,\dots,n$.

Vektor zovšeobecnených zrýchlení má tvar:

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_k, \dots, \ddot{q}_n]^T \,, \qquad k = 1,\dots,n \tag{14}$$

Všetkých $n \times n$ výrazov v sústave rovníc (2), ktoré sa týkajú zrýchlenia, sa môže vyjadriť rovnicou:

$$\mathbf{a}_{\ddot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A_0}\ddot{\mathbf{q}} \tag{15}$$

Koeficienty týkajúce sa rýchlosti v k-tej z n rovníc sústavy (2) môžu byť vyjadrené zvlášť symetrickou maticou $n \times n$ označenou $\mathbf{A_{1k}}$ a definovanou nasledovne:

$$\mathbf{A_{1k}} = \begin{vmatrix} 2a_{1k}^{11} & a_{1k}^{12} & a_{1k}^{13} & \cdots & a_{1k}^{1n} \\ a_{1k}^{12} & 2a_{1k}^{22} & a_{1k}^{23} & \cdots & a_{1k}^{2n} \\ a_{1k}^{13} & a_{1k}^{23} & 2a_{1k}^{33} & \cdots & a_{1k}^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k}^{1n} & a_{1k}^{2n} & a_{1k}^{3n} & \cdots & 2a_{1k}^{nn} \end{vmatrix} \,, \qquad k = 1,\dots,n \,. \tag{16}$$

Vektor zovšeobecnených rýchlostí má tvar:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n]^T \,, \qquad k = 1,\dots,n \,. \tag{17}$$

Všetkých $\sum_{i=1}^{n} i$ výrazov, ktoré sa týkajú rýchlosti v k-tej z n rovníc sústavy (2) sa môže napísať osobitne v tvare:

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\mathbf{A_{1k}}\dot{\mathbf{q}} \tag{18}$$

Na výraz daný rovnicou (18) sa môže pozerať ako na člen v n rozmernom stĺpcovom vektore označenom $\mathbf{a}_{\dot{\mathbf{q}}}$:

$$\mathbf{a}_{\dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dot{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\mathbf{A_{11}}\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\mathbf{A_{12}}\dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\mathbf{A_{1k}}\dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\mathbf{A_{1n}}\dot{\mathbf{q}} \end{vmatrix} \,, \qquad k = 1,\dots,n \,. \tag{19}$$

Koeficienty zohľadňujúce gravitáciu sa môžu ďalej vyjadriť n rozmerným stĺpcovým vektorom $\mathbf{a_g}$ [3]:

$$\mathbf{a_g} = [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k}, \dots, a_{2n}]^T \,, \qquad k = 1,\dots,n \,. \tag{20}$$

Zovšeobecnené sily Q_k pôsobiace v kinematických dvojiciach $k = 1,\dots,n$ sú vyjadrené n rozmerným vektorom $\mathbf{a_F}$:

$$\mathbf{a_F} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots, Q_n]^T \,, \qquad k = 1,\dots,n \,. \tag{21}$$

Pre dané zovšeobecnené sily $\mathbf{Q_k}$ $(k = 1,\dots,n)$ po integrovaní rovníc (4) získame aktuálny pohyb manipulátora vyjadrený vzťahmi s časovo sa meniacimi zovšeobecnenými premennými $\mathbf{q_k}, \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{k}, \ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{k}$ $(k = 1,\dots,n)$.

Z rovníc (4) vyplýva, že v prípade súčasného pohybu niekoľkých kinematických dvojíc, pohyb v jednej kinematickej dvojici má dynamický vplyv na pohyb ostatných kinematických dvojíc a silová dvojica resp. sila vyvodená v určitej kinematickej dvojici má dynamický vplyv na pohyb ostatných kimematických dvojíc. Pretože dynamické koeficienty sú závislé na hodnotách premenných v kinematickej dvojici, efekt dynamickej väzby medzi pohybmi rôznych kĺbov bude závislý na aktuálnom manipulátore a na konfigurácii členov počas pohybu.

Koeficienty a_{2k}, zohľadňujúce gravitáciu, sú závislé na vzájomnej polohe členov. Ostatné dynamické koeficienty sú závislé aj na pohybovom stave členov. Zotrvačnosť celého člena je daná koeficientami a_{0k}^i na diagonále matice $\mathbf{A_0}$. Dynamické koeficienty a_{0k}^i keď $i = k$ popisujú mechanickú štruktúru manipulátora. Na základe uvedeného postupu je možné vytvoriť algoritmus zostavenia a riešenia pohybových rovníc otvoreného kinematického reťazca.

Záver

V práci je popísaný postup dynamickej analýzy priestorových otvorených kinematických reťazcov. Na základe teórie základných matíc sa zostaví model kinematického reťazca a pomocou teórie Lagrangeových rovníc II.druhu sa vygeneruje sústava pohybových rovníc. Zostavenú sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc je možné riešiť numerickými metódami a ziskajú sa charakteristiky pohybu jednotlivých kinematických dvojíc – poloha, rýchlosť a zrýchlenie v určitých časových intervaloch.

Prínos práce je hlavne didaktický. Predovšetkým v odbore Aplikovaná mechanika uvedený postup prezentuje možnosť konkrétnej realizácie maticových numerických algoritmov pre automatizované generovanie matematických modelov a tiež ich numerické riešenie.

Poďakovanie

Autorka ďakuje za podporu vedeckej grantovej agentúre VEGA MŠ SR (projekt č. 1/3156/06)

Literatúra

[1] BRÁT, V.: Maticové metódy v analýze prostorových vázaných systému, Praha, Academia 1981.

[2] KOZLOV, V.V.- MAKARIČEV, V.P.- TIMOFEJEV, A.V.- JUREVIČ, E.I.: Dynamika riadenia robotov, Moskva, Nauka 1984.

[3] BEJCZY, A.K.: Robot Arm Dynamics and Control, California, NASA, 1974.

[4] HAUG, E.J.: Elements and methods of computational dynamics. Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, NATO ASI Series, Vol.F9, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

[5] KOPLIK, J.- LEU, M.C.: Computer Generation of Robot Dynamics Equations and the Related Issues, Journal of Robotic Systems, 3(3), s.301-319, 1986.

[6] STEJSKAL,V.- VALÁŠEK, M.:Kinematics and dynamics of Machinery, Marcel Dekker, Inc., New York 1996.

[7] WALDRON,K.J. – KINZEL, G.L.: Kinematics, Dynamics and Design of Machinery, John Wiley & Sons, Inc., New York 1999.

[8] SHABANA, A.A.: Dynamics of Multibody Systems (2nd edition), Cambridge University Press, 1998.

[9] SHABANA, A.A.: Computational Dynamics (2nd edition), John Wiley & Sons, Inc., New York 2001.

Abstract

The main objective of this work is to describe an algorithm for automatic formulation of dynamic equations. Proposed solution is based on use of transformation matrices and the Lagrangian formulation method. This aproach is suitable for computer modeling of open-chain structures with any number of degrees of freedom and with any combination of types of joint.

Ing. Darina Hroncová

TU Košice
Strojnícka fakulta
Katedra technickej mechaniky a mechatroniky
Letná 9
040 01 Košice
e-mail: darina.hroncova@tuke.sk