

Optimálne riadenie systémov s hybridnou dynamikou

Tomáš Hirmajer, Miroslav Fikar

Úvod

Tento článok sa zaoberá dynamickou optimalizáciou systémov, ktorých dynamické vlastnosti sa menia v čase – sú opísané viacerými systémami diferenciálnych rovníc, medzi ktorými sa prechádza v určitých prepínacích časoch. Problematika je objasnená na príklade optimálneho riadenia dvoch zásobníkov kvapaliny, ktoré sú umiestnené v nerovnej výške. K zmene dynamík dochádza v momente, keď výška hladiny v druhom zásobníku presiahne výšku dna prvého zásobníka. V tomto momente dochádza k zmene matematického opisu zo systému bez interakcie na systém s interakciou. Dynamická optimalizácia takéhoto hybridného systému je zabezpečená parametrizáciou vektora riadenia (CVP) a následným výpočtom optimálnych profilov riadenia. CVP je priama metóda, v ktorej je pôvodný problém dynamickej optimalizácie pretransformovaný na úlohu nelineárneho programovania (NLP), následne riešená vhodným NLP solverom.

1. Oboznámenie sa s problémom

Veľká množina procesov v chemickom priemysle, ale aj v praktickom živote je opísaná hybridným správaním, kedy matematický opis systému sa v určitých časových okamihoch mení. Za všetky môžeme spomenúť napríklad termodynamický proces zrážania a rozpúšťania, zmena prietoku kvapaliny z laminárneho toku na turbulentný tok, zmena priebehu procesu (miešanie, usadzovanie) v chemickom reaktore a mnoho ďalších procesov. Problémy riešenia systému s hybridnou dynamikou sú ukázané napríklad v článkoch [1], [2].

2. Formulácia problému

Uvažujme systém, ktorý je opísaný nasledovnými diferenciálnymi rovnicami

$$\dot{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, t) \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f_{n+1}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, t) \quad t_n \leq t \leq t_p \quad (2)$$

s počiatočnými a koncovými podmienkami $t_0 = t_0(\mathbf{u})$, $t_p = t_p(\mathbf{u})$, kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavov o rozmere z a \mathbf{u} je vektor riadenia o rozmere m . Ďalej predpokladajme spojito diferencovateľný systém počas celej trajektórie riadenia.

Okamihy označované t_{i^*} , počas ktorých dochádza k nahradeniu súboru rovníc iným súborom rovníc, sa volajú časy prepnutia a sú definované podmienkou

$$g_i(\mathbf{x}_i^-, t_i, \mathbf{u}) = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

V čase prepnutia môže byť vektor $\mathbf{x}(t)$ nespojitý s prerušením v tvare

$$\mathbf{x}_i^+ = \mathbf{x}_i^- + \Delta_i(\mathbf{x}_i^-, t_i, \mathbf{u}) \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

kde $\Delta_i(\mathbf{x}_i^-, t_i, \mathbf{u})$ je spojito diferencovateľný vektor a $\mathbf{x}_i^- = \mathbf{x}(t_i^-)$, $\mathbf{x}_i^+ = \mathbf{x}(t_i^+)$ sú hodnoty vektora pred a po t_{i^*} . Ďalej zadefinujeme model merania, ktorý je určený rovnicou

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, t) \quad t \in [t_0, t_p] \quad (5)$$

kde $\boldsymbol{\eta}(t)$ je spojité, spojito diferencovateľný, ohraničený vektor. Rozmer $\boldsymbol{\eta}(t)$ a $\mathbf{x}(t)$ môže byť rôzny. Účelová funkcia J je vo všeobecnom Bolza tvare [3], [4]

$$J(\mathbf{u}) = G(\boldsymbol{\eta}(t_p), \mathbf{u}, t_p) + \int_{t_0}^{t_p} F(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{u}, t) dt \quad (6)$$

kde J je hodnota funkcie, ktorá je minimalizovaná (funkcionál kvality dynamického systému), G zahŕňa podmienky vzhľadom na konečný čas a F zahŕňa podmienky vzhľadom na celý proces. Podrobným odvodeniam sa nebudeme venovať, bližšie sú ukázané v práci [5].

3. Algoritmus riešenia

Trajektóriu riadenia rozdelíme na P po častiach konštantných úsekov, čím problém dynamickej optimalizácie pretransformujeme na problém statickej optimalizácie (CVP) [6]. Postup je založený na teórii optimálneho riadenia a variačného počtu. V algoritme predpokladáme funkcionál J_0 a k obmedzení J_i , kde $i = \overline{1, k}$. Pre jednoduchosť uvažujeme systém, v ktorom $\Delta_i(\mathbf{x}_i^-, t_i, \mathbf{u}) = 0$ a počiatočný čas, stav sú známe a konštantné hodnoty. Algoritmus je potom nasledovný:

1. Integrácia systému (1) – (2) a integrálnych tvarov F_i od $t = t_0$ po $t = t_p$. Reštart integrácie nastáva pri podmienkach záměny (3), pričom stavy môžu byť nespojitě (4).

2. Cyklus pre $i = \overline{0, k}$

a) Inicializácia adjugovaných premenných $\boldsymbol{\lambda}_i^T(t_p)$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^T(t_p) = \frac{\partial G_i(\boldsymbol{\eta}(t_p), \mathbf{u}, t_p)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_p)} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_p)}{\partial \mathbf{x}(t_p)} \quad (7)$$

b) Inicializácia nulovej dočasnej veličiny $J_{u,i}$.

c) Spätná integrácia adjugovaného systému a dočasných premenných od $t = t_p$ po $t = t_0$. V prípade nespojitosti adjugovaných rovníc reštartujeme integráciu v týchto bodoch

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T = -\frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}^T} \quad (8)$$

$$\dot{J}_{u,i}^T = \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{u}^T} \quad (9)$$

kde H je Hamiltonova funkcia definovaná pre daný problém.

d) Vypočítame gradienty vzhľadom na vektor riadenia a časy

$$\frac{\partial J_i}{\partial t_p} = H_i(t_p^-) + \frac{\partial G_i}{\partial t_p} \quad (10)$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial t_j} = H_i(t_j^-) - H_i(t_j^+) + \frac{\partial G_i}{\partial t_j} \quad j = \overline{1, (P-1)} \quad (11)$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{u}_j} = \mathbf{J}_{u,i}(t_{j-1}) - \mathbf{J}_{u,i}(t_j) \quad j = \overline{1, P} \quad (12)$$

Týmto spôsobom získame hodnoty J_i v 1. kroku a hodnoty gradientov v 2d. kroku. Toto je všetko čo je potrebné vedieť pri zadávaní vstupu pre program nelineárneho programovania.

4. Implementácia algoritmu riešenia

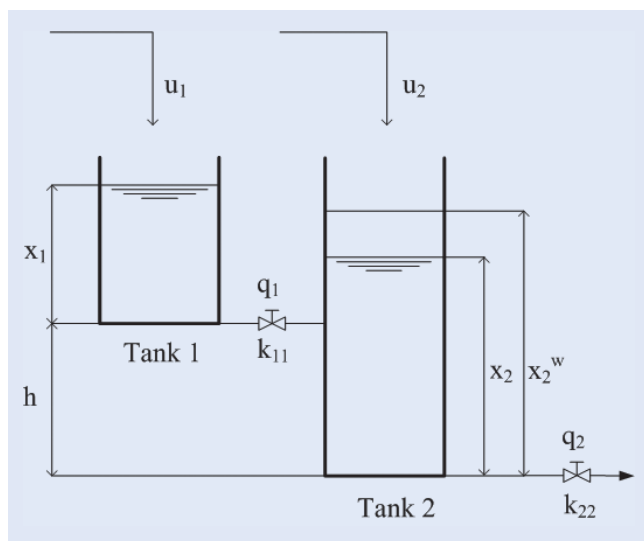
Prezentovaný algoritmus bol implementovaný v programovacom jazyku FORTRAN 77. Prvá časť programu obsahuje ODE solver pre doprednú a spätnú integráciu so schopnosťou prepnutia dynamiky v čase t_w [7]. Druhá časť programu obsahuje modul, ktorý počíta gradienty a volá NLP solver NLPQL [8], pri ktorom dochádza k minimalizácii účelovej funkcie.

5. Dva zásobníky kvapaliny

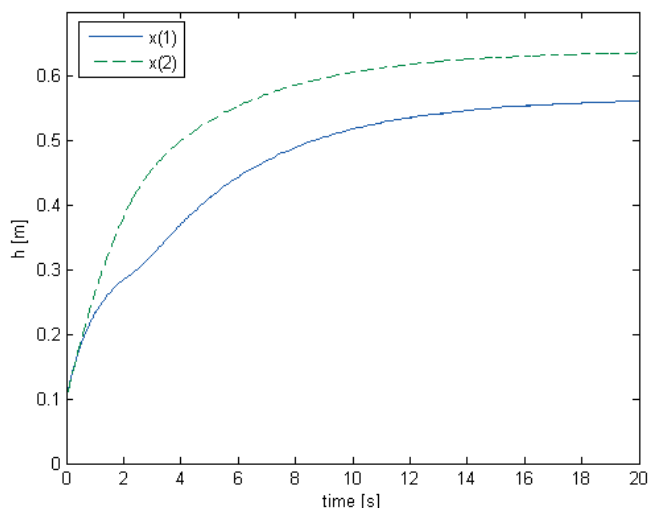
Predpokladajme nelineárny systém dvoch zásobníkov kvapaliny, ktorý je zobrazený na obr. 1 a je opísaný nasledovnými diferenciálnymi rovnicami

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} \\ \frac{dx_{12}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - k_{11}\sqrt{x_1}}{F_1} \\ \frac{u_2 + k_{11}\sqrt{x_1} - k_{22}\sqrt{x_2}}{F_2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{dx_{21}}{dt} \\ \frac{dx_{22}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - k_{11}\sqrt{x_1 - (x_2 - h)}}{F_1} \\ \frac{u_2 + k_{11}\sqrt{x_1 - (x_2 - h)} - k_{22}\sqrt{x_2}}{F_2} \end{pmatrix} \quad (14)$$



Obr.1 Zásobníky kvapaliny



Obr.2 Simulácia hybridného systému s konštantným riadením

kde máme definované konkrétne hodnoty parametrov: konštanty $k_{11} = 1,7512 \cdot 5^{-1}$, $k_{22} = 1,5012 \cdot 5^{-1}$, plochy $F_1 = 2,00 \text{ m}^2$, $F_2 = 4,00 \text{ m}^2$, vertikálna vzdialenosť medzi zásobníkmi $h = 0,40 \text{ m}$, počiatočné stavy $x_1(0) = x_2(0) = 0,10 \text{ m}$ a želaná výška kvapaliny v druhom zásobníku $x_2^w = 1,00 \text{ m}$. Počiatočné hodnoty optimalizovaných parametrov sú: $u_i = 1 \text{ ls}^{-1}$, $\Delta t_i = 1 \text{ s}$ s ohraničeniami $u_i \in [0;3]$ a $\Delta t_i \in [0,1;10,00]$. Na obr. 2 môžeme vidieť priebeh stavových veličín odsimulovaný s počiatočnými parametrami a s časom simulácie $t_P = 20 \text{ s}$.

Podmienka pre zámenu dynamík je v tomto prípade daná rovnicou

$$g_1 = h - x_2 \quad (15)$$

Budeme skúmať nasledovné dva optimalizačné problémy:

a) problém minimalizácie času

$$\min_{t_P, u} J_0 = t_P \quad (16)$$

b) problém LQ riadenia

$$\min_u J_0 = \int_{t_0}^{t_P} \left((x_2 - x_2^s)^2 + r(u_1 - u_1^s)^2 \right) dt \quad (17)$$

vzhľadom na koncové ohraničenia:

$$J_1 = x_2(t_P) - x_2^w = 0 \quad (18)$$

$$J_2 = \frac{dx_1(t_P)}{dt} = 0 \quad (19)$$

$$J_3 = \frac{dx_2(t_P)}{dt} = 0 \quad (20)$$

Podmienka J_1 zabezpečí, že hladina kvapaliny v druhom zásobníku dosiahne žiadajú hodnotu (x_2^w). Podmienky J_2, J_3 zabezpečia, že ustálená hodnota kvapaliny v prvom a druhom zásobníku po dosiahnutí žiadanej hodnoty v čase t_P je konštantná.

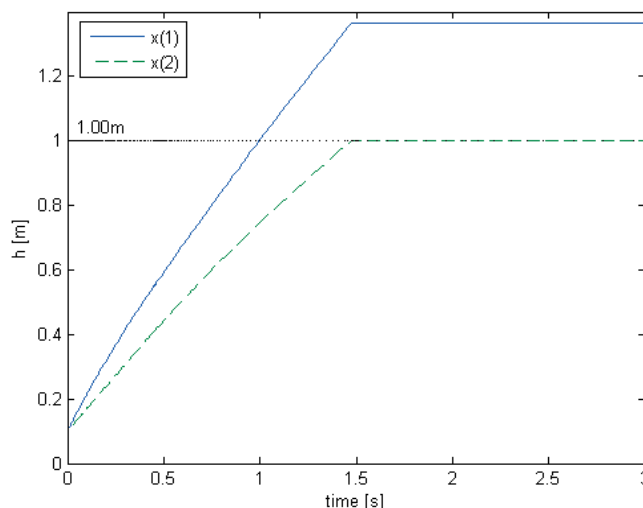
6. Problém minimalizácie času

6.1 Optimálne riadenie s viacerými riadiacimi veličinami

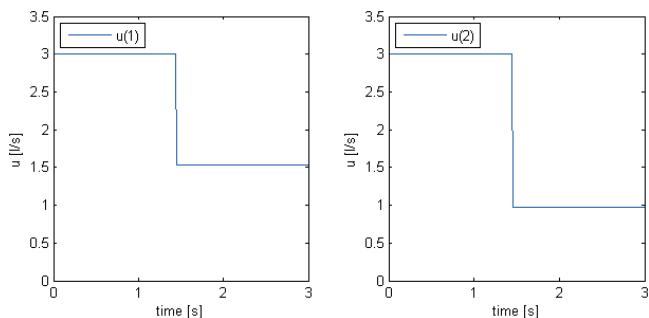
Uvažujme problém, pri ktorom pomocou dvoch optimalizovaných vstupných prietokov chceme čo najskôr dosiahnuť žiadajú ustálenú hodnotu. Na riadenie procesu sme použili 2 úseky s presnosťou optimalizácie 10^{-6} a integrácie 10^{-10} . Minimálnu hodnotu sme dosiahli v čase $t_P = 1,47 \text{ s}$ po 8 NLP iteráciách. Na obr. 3 môžeme vidieť optimálnu stavovú trajektóriu s odpovedajúcim riadením zobrazeným na obr. 4.

6.2 Optimálne riadenie s jednou riadiacou veličinou

Vo viac realistickom prípade uvažujeme optimalizáciu iba jednej riadiacej veličiny – vstupného prietoku do prvého zásobníka.



Obr.3 Priebeh dynamiky s optimálnym riadením pre príklad 6.1

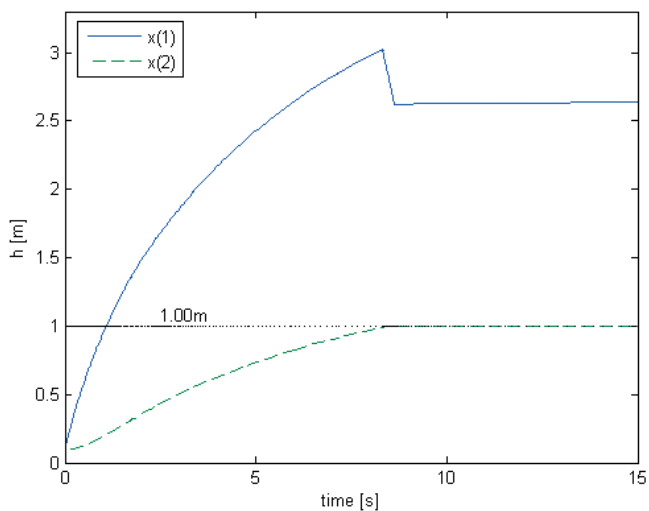


Obr.4 Optimálny profil riadenia pre príklad 6.1

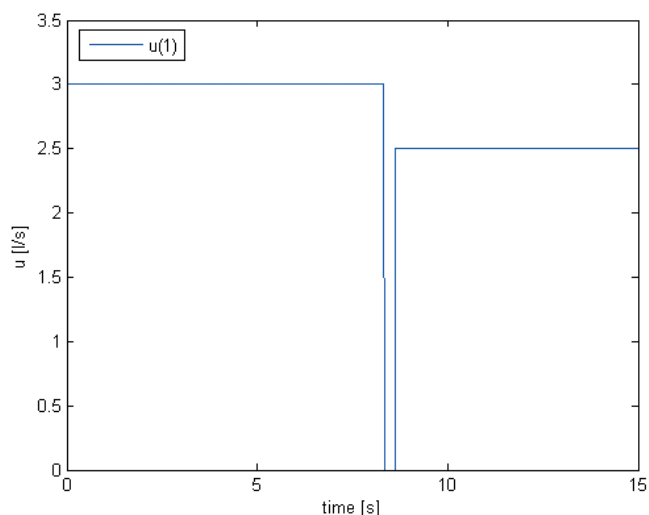
Bolo určených 8 časových intervalov. Tolerancia optimalizácie a integrácie bola nastavená na 10^{-4} a 10^{-12} . V tomto prípade nájdený minimálny čas bol vyšší, konkrétne $t_p = 8,62$ s. Optimálna stavová trajektória je zobrazená na obr. 5 s príslušným riadením na obr. 6. Riadiaca veličina ukazuje typické dvojúrovňové optimálne riadenie systému. Hoci bolo zvolených 8 optimalizovaných intervalov, stačili 3: dva pre optimálne riadenie systému s dynamikou druhého rádu a jeden pre dosiahnutie nového ustáleného stavu.

7. Problém LQ riadenia

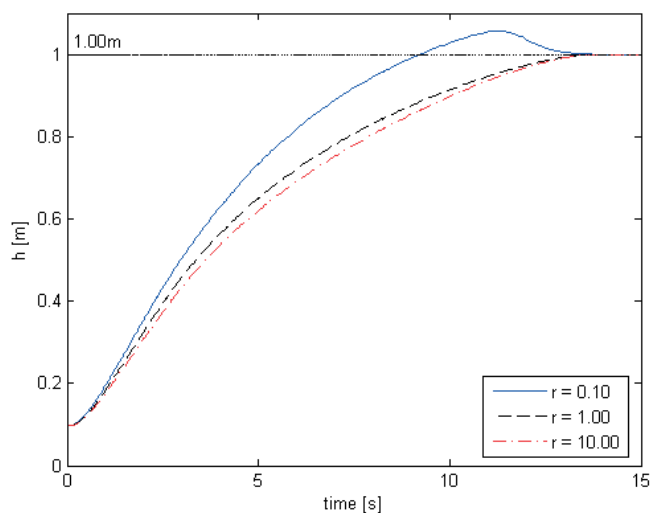
V tomto prípade sme uvažovali 15 intervalov, v ktorých trvanie sme nastavili na 1 s. Optimalizovali sme iba riadiacu veličinu do prvého zásobníka s presnosťou optimalizácie 10^{-5} a integrácie 10^{-12} . Analýza ustálených stavov určila ich nové hodnoty: $x_2^S = 1,00$ m, $u_1^S = 2,50$ ls^{-1} . Bola uvažovaná rozdielna veľkosť



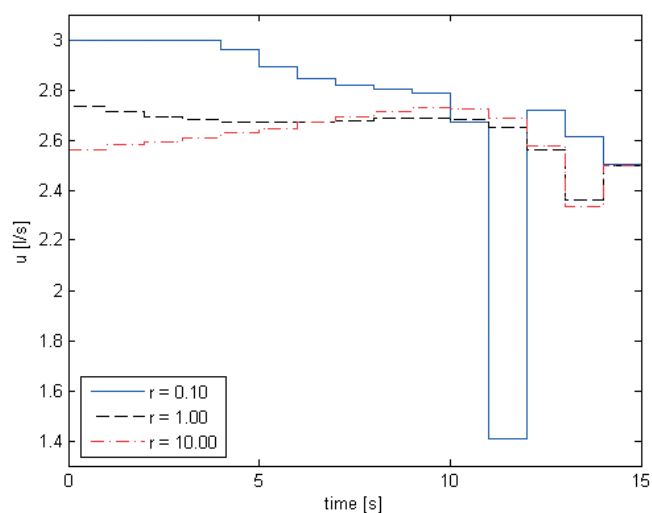
Obr.5 Priebeh dynamiky s optimálnym riadením pre príklad 6.2



Obr.6 Optimálny profil riadenia pre príklad 6.2



Obr.7 Výška hladiny v druhom zásobníku pre rôzne váhové koeficienty pre príklad 7



Obr.8 Optimálny profil riadenia pre rôzne váhové koeficienty pre príklad 7

penalizačného koeficientu r . Optimálne stavové trajektórie sú zobrazené na obr. 7 a riadenia na obr. 8 pre rôzne hodnoty r . Znižovanie hodnoty r vedie k podobnému správaniu, ako bolo prezentované pri probléme minimalizácie času. Na druhú stranu, zvyšovanie koeficientu r pôsobí na riadiacu veličinu iba s malou stratou výkonu. Optimálna hodnota účelovej funkcie pri uvažovanom penalizačnom koeficiente $r = 1$ bola 2,7517 so 7 NLP iteráciami.

Záver

V tomto článku bol riešený problém dynamickej optimalizácie systému opísaného skupinou diferenciálnych rovníc, medzi ktorými je proces prepínaný. Na rozdiel od štandardných postupov uvádzaných v literatúre, kde sú pre výpočet gradientov kritéria a obmedzení preferované citlivostné rovnice vzhľadom pre ich jednoduchosť implementácie, v tomto príspevku boli gradienty počítané pomocou teórie optimálneho riadenia.

Výhoda uvedeného postupu spočíva pre prípad systémov opísaných veľkým počtom diferenciálnych rovníc, kedy sa môže značne zredukovať čas výpočtu.

Simulácia s jednoduchým príkladom z oblasti procesného inžinierstva potvrdila atraktivitu prezentovaného prístupu.

Podakovanie

Príspevok vznikol s grantovou podporou grantovej agentúry VEGA MŠ SR a SAV pre projekty č. 1/0135/03 a 1/1046/04.

Literatúra

- [1] AVRAAM, M. P., SHAH, N. a PANTELIDES, C. C.: Modeling and Optimisation of General Hybrid Systems in the Continuous Time Domain, *Computers and Chemical Engineering*, 22: 221 – 227, 1998.
- [2] VASSILIADIS, V. S., SARGENT, R. W. H a PANTELIDES, C. C.: Solution of a Class of Multistage Dynamic Optimization Problems. Centre for Process Systems Engineering, American Chemical Society, 33:2111-2133, 1994.
- [3] BRYSON, A. E., YU-CHI HO: Applied Optimal Control – Optimization, Estimation and Control. Hemisphere publishing corporation, Taylor & Francis, Inc., 1975.
- [4] RUBAN, A. I.: Sensitivity Coefficients for Discontinuous Dynamic Systems. *Computer and Systems Sciences International*, 36:536-542, 1997.
- [5] HIRMAJER, T.: Dynamická optimalizácia biochemického reaktora pracujúceho vo vsádzkovom režime, 2005. http://www.kirp.chtf.stuba.sk/~hirmajer/files/works/MTH_batch.pdf.
- [6] FIKAR, M., LATIFI, M. A.: User's guide for FORTRAN dynamic optimisation code DYNO. Technical Report f0201, LSGC CNRS, Nancy, France; STU Bratislava, Slovak Republic, 2001. S. Galán and P. I. Barton. Dynamic optimization of hybrid systems. *Computers and Chemical Engineering*, 22:183-190, 1998.
- [7] PETZOLD, L. R., HINDMARSH, A. C.: LSODAR. Technical report, Computing and mathematics research division, Lawrence Livermore national laboratory Livermore, CA 94550, 1997.
- [8] SCHITTKOWSKI, K.: NLPQL: A new FORTRAN implementation of a sequential quadratic programming algorithm for parallel computing. Technical report, Department of Mathematics, University of Bayreuth, D – 95440 Bayreuth, 1981.

Ing. Tomáš Hirmajer

doc. Dr. Ing. Miroslav Fikar

**Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Katedra informatizácie a riadenia procesov
Tel.: 02/52 49 52 69
e-mail: tomas.hirmajer@stuba.sk**