

Generování časově optimální trajektorie pro mobilního robota s diferenciálním řízením

Michal Gajdušek, František Šolc

V článku je představen kinematický a dynamický model rychlého mobilního robota s diferenciálním podvozkem. Z modelu robota jsou získány vztahy pro maximální tečnou a otáčivou akceleraci, které mu zaručují pohyb bez smýkání. Následně je popsán způsob generování dráhy pro robota pomocí splajnů a výpočet minimálního času potřebného pro průchod po této dráze za uvedených akceleračních omezení. Nakonec se provádí optimalizace navržené dráhy pro minimalizaci času stráveného na dráze.

Úvod

V posledních letech se v průmyslu klade stále větší význam na optimalizaci výroby. Zkracuje se doba od vytvoření poptávky na trhu po dodání zboží zákazníkovi a v silném konkurenčním prostředí jsou ceny produktů stlačovány až skoro na výrobní náklady. Proto každé malé urychlení, zlevnění nebo zefektivnění výroby může znamenat i mnohonásobně vyšší zisk. Mobilní roboti jsou v průmyslu nasazováni stále častěji a jejich úkol je převážně transportovat materiál nebo výrobky mezi sklady a výrobními linkami. To je i jeden z důvodů proč se v našem článku zabýváme optimalizací trajektorie mobilního robota.

Náš model robota vychází ze systému robotického fotbalu Mirobot [1], který byl vytvořen právě pro zdokonalování v oblasti mobilní robotiky. Soutěživé prostředí robotického fotbalu vytváří podklad pro intenzivní vývoj a testování nových technologií.

V systému robotického fotbalu Mirobot je definován pravidly maximální rozměr robota, jako krychle o hraně 8 cm. Do této krychle se musí vejít kola, motory, baterie i řídicí elektronika s rádiovým komunikačním modulem. Z tohoto důvodu není mnoho prostoru pro výběr druhu pohonu robota. Jako nejvhodnější se ukázalo uspořádání s diferenciálním řízením (obr. 1.), kdy je tělo robota osazeno dvěma nezávislými koly. Toto uspořádání umožňuje nulový poloměr zatáčky (robot je schopen se otočit na místě). Proti přílišnému naklápění je v přední a zadní části podvozku umístěna rolnička s minimálním třecím odporem. O rolničku se robot opírá pouze v případě akcelerace, v opačném pří-

padě působí svou vahou na vozovku přes kola. Robot je velmi rychlý, může se pohybovat rychlostí přes 2 m.s⁻¹.

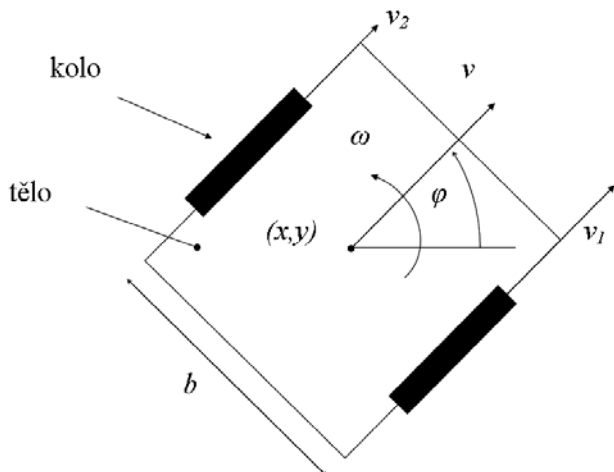
Matematický model robota

Pro vytvoření modelu s přiměřenou složitostí jsme museli přijmout několik zjednodušujících předpokladů. V našem případě se robot pohybuje po dokonale rovné ploše bez smýkání (k zabránění prokluzu slouží dále uvedená omezení na akceleraci) a zanedbáváme valivý odpor kol a rolničků. Kinematický model robota má tvar

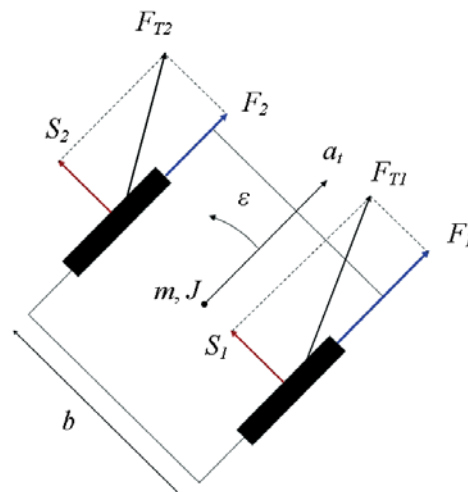
$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\varphi) & v &= \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \dot{y} &= v \sin(\varphi) & \omega &= \frac{2(v_1 - v_2)}{b} \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned} \quad (1)$$

kde x, y a φ jsou souřadnice a natočení robota, v je tečná rychlost, ω je otáčivá rychlost robota a v_1 a v_2 jsou obvodové rychlosti kol. Kinematický model nám umožňuje určit polohu a natočení robota ze znalosti počátečního stavu a aplikovaných rychlostí kol. Jeho platnost je však omezena na situaci kdy nedochází k prokluzu kol, neboli není překročena maximální třecí síla mezi koly a povrchem vozovky. K určení maximální třecí síly a potažmo maximálního možného zrychlení robota byl vytvořen následující dynamický model robota.

$$ma_t = F_1 + F_2 \quad (2)$$



Obr.1 Mobilní robot



Obr.2 Rozložení třecích sil



$$J\varepsilon = (F_1 - F_2) \frac{b}{2} \quad (3)$$

Kde tečné zrychlení a_1 robota je určeno jeho hmotností m a silami F_1, F_2 kterými působí kola na vozovku z důvodu změny rychlosti otáčení kol (zrychlujeme nebo brzdíme). Otáčivé zrychlení ε je určeno stejnými silami, rozchodem kol b a momentem setrvačnosti J těla robota. Kola jsou vyrobena z tenkého hliníkového plechu a proto je moment setrvačnosti kol zanedbán. Maximální síla, kterou může každé kolo přenést souvisí s třecí silou F_{Ti} mezi koly a vozovkou a lze ji rozložit na tečnou F_i a normálovou S_i , působící na robota při jízdě do zatáčky, přičemž platí:

$$F_{Ti}^2 = F_i^2 + S_i^2 \quad (4)$$

$$S_i = \frac{m}{2} v \omega \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

Maximální třecí sílu F_{Tmax} lze snadno vyjádřit pomocí normálové síly F_N kterou působí každé kolo na vozovku a koeficientu tření μ :

$$F_{Tmax} = \mu F_N \quad (6)$$

Pokud ale vezmeme v úvahu náš model mobilního robota, není normálová síla F_N konstantní, ale závisí na tečném zrychlení robota. Je to dáno tím, že při tečné akceleraci dochází k opírání robota o zadní rolničku a tím se snižuje síla, kterou působí kola na vozovku:

$$F_{Ni} = \left(g - |a_t| \frac{r+h}{d} \right) \frac{m}{2} \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

Kde r je poloměr kol, h je výška těžiště nad osou otáčení kol a d je kolmá vzdálenost od osy otáčení kol k opěrnému bodu, jak je vyznačeno na obr. 3.

Pokud dosadíme rovnici (7) spolu s (6) do (4), dostaneme vztah pro maximální sílu F_i kterou může každé kolo přenést

$$F_i = \frac{m}{2} \sqrt{\mu^2 \left(g - |a_t| \frac{r+h}{d} \right)^2 - v^2 \omega^2} \quad (8)$$

Pokud využívá jedno z kol právě tuto mezní sílu a robot akceleroje s tečným zrychlením a_t , můžeme vypočítat aktuální přenášející sílu druhého kola pomocí vztahu (2):

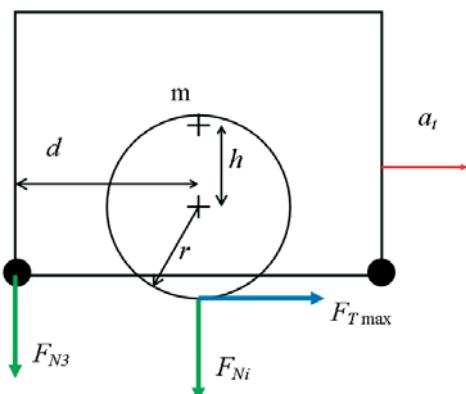
$$F_1 = ma_t - F_2 = ma_t - \frac{m}{2} \sqrt{\mu^2 \left(g - |a_t| \frac{r+h}{d} \right)^2 - v^2 \omega^2} \quad (9)$$

a dosažením těchto sil do (3) dostaneme závislost mezních hodnot tečného a_t a otáčivého ε zrychlení

$$\varepsilon = \pm \frac{mb}{2J} \left(\sqrt{\mu^2 \left(g - |a_t| \frac{r+h}{d} \right)^2 - v^2 \omega^2} - |a_t| \right) \quad (10)$$

nebo

$$\left(\frac{2J}{mb} |\varepsilon| + |a_t| \right)^2 = \mu^2 \left(g - |a_t| \frac{r+h}{d} \right)^2 - v^2 \omega^2 \quad (11)$$



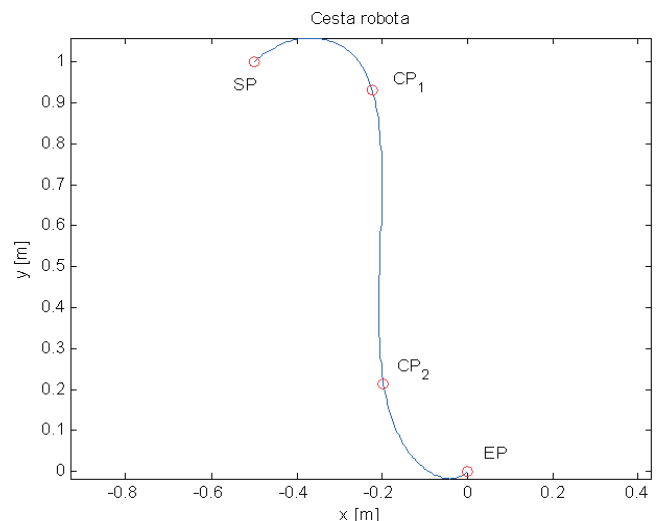
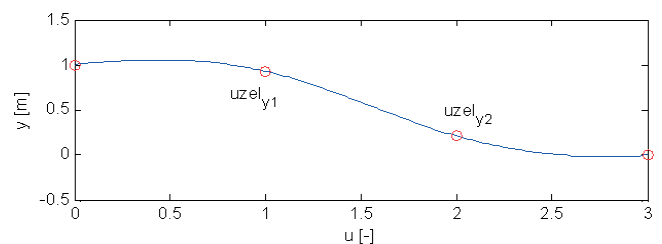
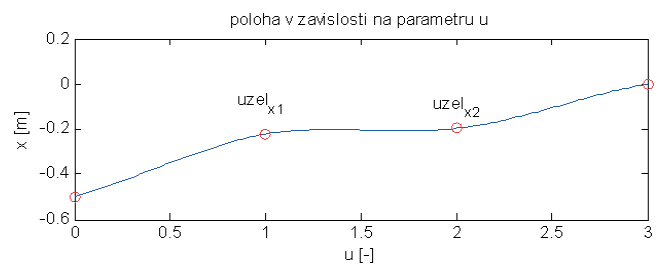
Obr.3 Boční pohled na robota, síly kterými působí robot na vozovku při akceleraci

Tyto rovnice říkají, že pokud se bude robot pohybovat nějakou okamžitou tečnou rychlostí v a otáčivou rychlostí ω , můžeme snadno vypočítat, jak velkou tečnou a otáčivou akceleraci můžeme použít, aniž by se robot začal smýkat. Jelikož máme dvě akcelerace, které chceme spočítat, ale pouze jednu rovnici omezení, máme jeden stupeň volnosti a tím je poměr mezi těmito akceleracemi. Můžeme využít všechnu přenositelnou sílu pouze na zrychlení otáčivé nebo na tečné, a nebo můžeme tyto akcelerace rozdělit v libovolném poměru vzhledem k uvedené rovnici.

Deklarace dráhy robota

Existují různé způsoby, jak popsat dráhu robota a množství literatury, která se tímto problémem zabývá [2], [3], [4]. Pro náš model robota jsme hledali takový způsob popisu dráhy, který by zaručoval spojitý průběh rychlostí (tečné i otáčivé). Takovou podmínku nesplňuje např. dráha složená z kružnic a přímkou, kdy dochází v bodě návaznosti dvou úseků k nespojitě změně rychlostí kol a tím k překročení maximální dovolené akcelerace a k prokluzu kol. Rozhodli jsme se proto k popisu dráhy pomocí splajně a modifikovali jsme metodu popsanou v [5], kde uvedený model umožňuje neomezeně velkou otáčivou akceleraci, která může způsobit prokluz kol. Hlavní rozdíl naší metody oproti [5] je v započítání a omezení otáčivé akcelerace podle (11), protože v našem modelu není robot brán jako hmotný bod, ale jako těleso s nezanedbatelnými rozměry.

Splajn je křivka tvořená segmenty – polynomy n -tého stupně. V praxi se nejčastěji využívají kubické splajny, které jsou tvořeny polynomy 3. stupně:



CP – kontrolní bod, SP – počáteční bod, EP – konečný bod

Obr.4 Vytvoření dráhy pomocí dvou splajně $x(u)$ a $y(u)$

$$y(u) = au^3 + bu^2 + cu + d \quad (12)$$

Jednotlivé segmenty (polynomy) na sebe navazují v uzlech a každý splajn může být tvořen libovolným počtem těchto segmentů. Použití polynomu 3. stupně nám zaručuje spojitou první a druhou derivaci v uzlech.

Abychom byli schopni vytvořit libovolnou dvourozměrnou dráhu, musí být použito parametrické vyjádření této křivky, toho dosáhneme kombinací dvou splajnů $x(u)$, $y(u)$ v závislosti na parametru u .

Ve dvourozměrné reprezentaci splajnů tvoří uzly tzv. kontrolní body (control points – CP), kde na sebe navazují vždy dva segmenty pro každou osu. Kromě CP jsou ještě významnými počáteční (SP) a koncový bod (EP). Tyto dva body jsou dány počáteční polohou robota a místem kam chceme dojet. Počáteční a koncový směr lze převést jako podmínky na poměr hodnot prvních derivací v počátečním a koncovém bodě.

Rychlostní profil

Pomocí předchozího postupu jsme vytvořili dráhu pro robota. V dalším kroku spočítáme jak velkou rychlostí se po ní může robot pohybovat a jak dlouho mu to bude trvat.

Pro výpočet rychlostního profilu na dráze potřebujeme znát křivost dráhy. Křivost dráhy κ je definována jako obrácená hodnota

poloměru zatáčky nebo poměr otáčivé rychlosti ku tečné rychlosti ω/v . Můžeme ji také spočítat z parametrického vyjádření dráhy:

$$\kappa(u) = \frac{x'(u)y''(u) - y'(u)x''(u)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Maximální rychlost, jakou se můžeme pohybovat v každém bodě dráhy, je možné vypočítat z (11) a křivky křivosti dráhy, kde položíme tečnou akceleraci rovnu nule ($a_t = 0$) a otáčivou akceleraci pouze tak velkou, aby při okamžité maximální rychlosti byl robot schopen kopírovat dráhu (kopírovat změnu křivosti dráhy):

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad d\omega = v d\kappa \quad dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow v_{\max} d\kappa = \varepsilon \frac{ds}{v_{\max}} \quad (14)$$

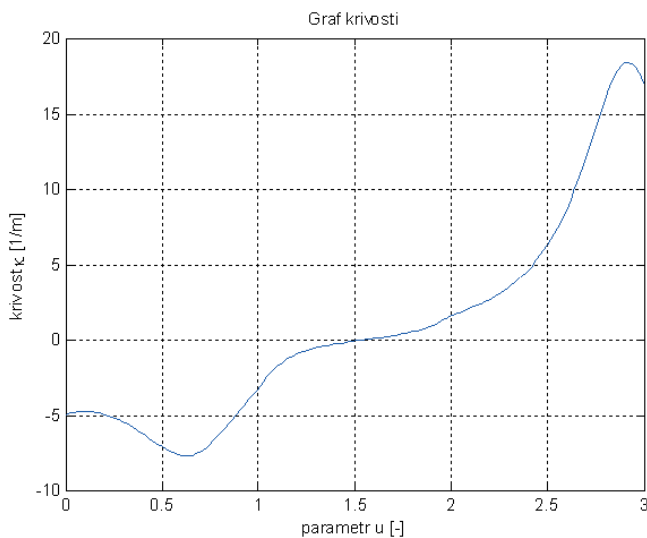
kde $d\kappa$ je změna křivosti a ds změna dráhy:

$$ds(u) = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du \quad (15)$$

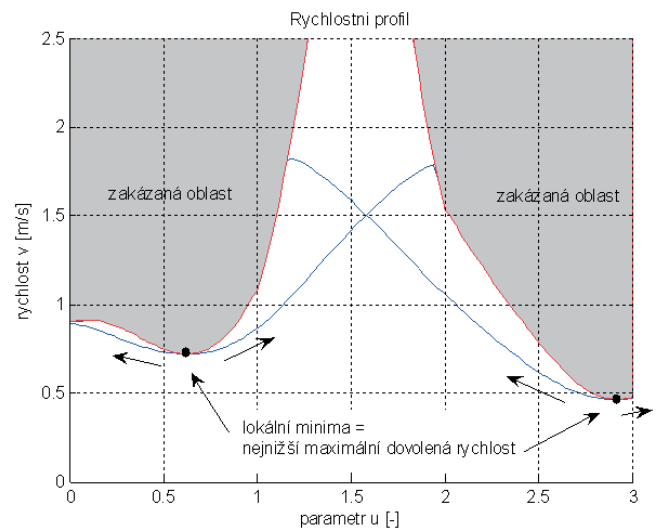
potom výsledná maximální rychlost v každém bodě dráhy je dána vztahem

$$v(u) = \sqrt{\frac{\mu g s'(u)}{A^2 k'(u)^2 + \kappa(u)^2 s'(u)^2}} \quad A = \frac{2J}{mb} \quad (16)$$

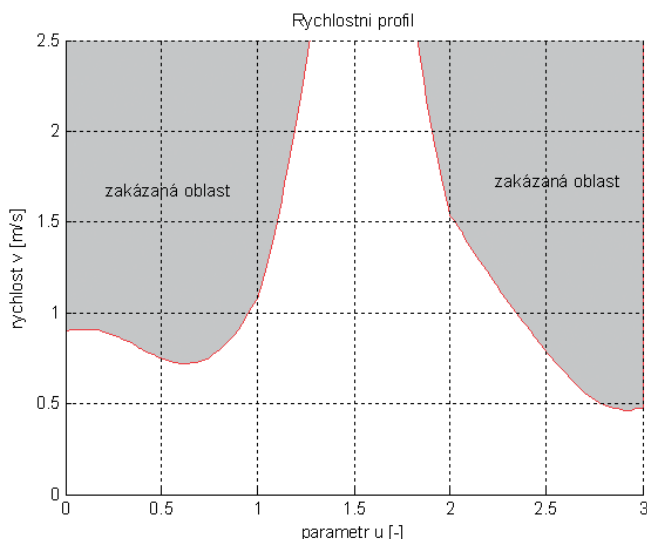
Vypočítaný profil maximální rychlosti nám dává představu, jakou maximální rychlostí se robot může v každém okamžiku na dráze pohybovat, ale pouze při nulové tečné akceleraci ($a_t = 0$). Nyní najdeme v grafu rychlosti lokální minima. Jsou to body, v nichž je křivost zatáčky nebo změna křivosti vysoká a robot musí snížit



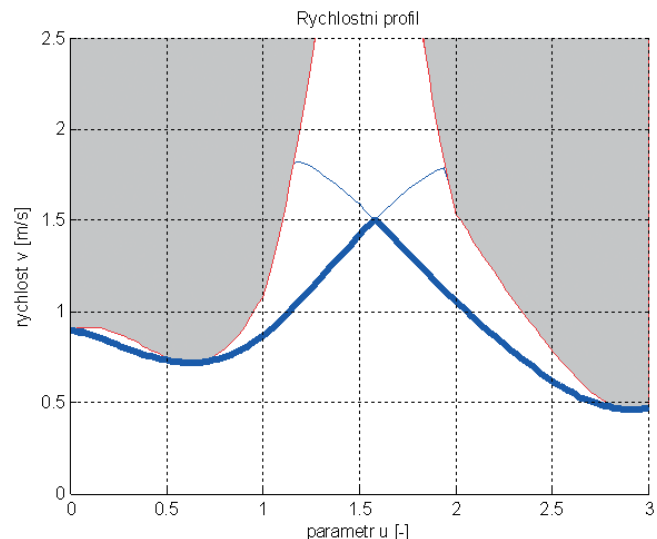
Obr.5 Graf křivosti dráhy



Obr.7 Tvorba rychlostního profilu z bodů s nejnižší maximální dovolenou rychlostí



Obr.6 Graf maximální povolené rychlosti v každém bodě dráhy (bez závislosti na předchozí a následné rychlosti) při $a_t = 0$



Obr.8 Výsledný rychlostní profil je dán křivkami s nejnižší rychlostí

rychlost, aby tuto část projel. Před a za body s minimální rychlostí je možné akcelarovat podle (11).

Takto vypočítáme rychlostní profil z každého bodu minimální rychlosti. Výsledný rychlostní profil je pak dán křivkami s nejnižší rychlostí (aby byl robot schopen snížit svou rychlost na úroveň lokálních minim).

Ze znalosti rychlostního profilu na celé dráze můžeme snadno vypočítat dobu, po kterou se bude robot po této dráze pohybovat

$$t = \int_{Start}^{End} \frac{ds}{v(s)} = \int_{u_{Start}}^{u_{End}} \frac{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}}{v(u)} du \quad (17)$$

Optimalizace trajektorie

Naším cílem není nalézt jednu dráhu pro robota, ale časově optimální. Nalezli jsme sice nejkratší čas, za jaký robot může projet danou dráhu, ale tvar dráhy můžeme také měnit. K tomuto účelu je využita optimalizace polohy kontrolních bodů. Každý kontrolní bod je určen x, y pozicí, což jsou 2 stupně volnosti. Počet kontrolních bodů závisí pouze na našem uvážení. V praxi se osvědčilo použití 2 až 3 kontrolních bodů jako kompromis mezi precizností popisu trajektorie a výpočetní náročností. Pro optimalizaci polohy kontrolních bodů jsme použili simplexovou metodu Nelder-Mead [6], která je vhodná na řešení nelineárních problémů, jako je tento. Kritériem optimality je čas potřebný na projetí dráhy. Optimalizační proces probíhá takto:

1. Nastavení počátečních hodnot kontrolních bodů
2. Výpočet polynomů pro vytvoření splajnů
3. Určení křivosti dráhy
4. Vytvoření rychlostního profilu
5. Výpočet času
6. Změna polohy kontrolních bodů optimalizační metodou a návrat k bodu 2.

Zhodnocení a závěr

Představili jsme kinematický a dynamický model mobilního robota. Z dynamického modelu jsme získali akcelerační omezení, které zaručují pohyb robota bez smýkání. Dráha je popsána pomocí kubických splajnů a optimální rychlostní profil robota na dráze je určen pomocí vypočtených akceleračních omezení. Časová optimalizace dráhy je prováděná změnou polohy kontrolních bodů simplexovou metodou Nelder-Mead. Podle uvedeného postupu se nám podařilo vytvořit algoritmus, který je schopen spočítat časově optimální dráhu mobilního robota bez prokluzu kol z počáteční do libovolné koncové pozice. Optimalizační proces je výpočetně náročný, výpočet jedné optimální trajektorie trvá na počítači s procesorem P4 3 Ghz řádově stovky milisekund. Proto nebylo možné zimplementovat tento algoritmus do systému robotického fotbalu MiroSot pro počítání trajektorií v reálném

čas. Je však možné vytvořit dostatečně velkou množinu různých řešení předem a při aplikaci pak použít interpolaci předpočítaných hodnot. Existují však i aplikace kde tento nedostatek nemusí vadit. Robot se může pohybovat po stále stejné dráze nebo je mezi jednotlivými jízdami na výpočet optimální dráhy dostatek času.

Tento výsledek byl získán za finančního přispění Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci podpory projektu výzkumu a vývoje 1M0567.

Literatura

- [1] FIRA: Pravidla her kategorie MiroSot [on-line], leden 2006, dostupné z URL: <http://www.fira.net/soccer/mirosot/overview.html>
- [2] PODSEDKOWSKI, L. et al.: A new solution for path planning in partially known or unknown environment for nonholonomic mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 2001, vol. 34, s. 145 – 152. ISSN 0921-8890
- [3] TING, Y., LEI, W. I., JAR, H. C.: A path planning algorithm for industrial robots. *Computers and industrial engineering*, 2002, vol. 42, s. 299 – 308. ISSN 0360-8352.
- [4] SPRINGER, G. et al.: Simple strategies for collision-avoidance in robot soccer. *Robotics and Autonomous Systems*, 1997, vol. 21, s. 191 – 196. ISSN 0921-8890
- [5] LEPETIC, M. et al.: Time optimal path planning considering acceleration limits. *Robotics and Autonomous Systems*, 2003, vol. 45, s. 199 – 210. ISSN 0921-8890.
- [6] NELDER, J. A., MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal*, 1965, vol. 7, s. 308 – 313. ISSN 0010-4620.

Ing. Michal Gajdušek

Vysoké učení technické v Brně
FEKT
Kolejní 4, 612 00 Brno, ČR
Tel.: +420 541 14 11 16
Fax: +420 541 14 11 23
e-mail: gajdusekm@post.cz

doc. Ing. František Šolc, CSc

Vysoké učení technické v Brně
FEKT
Kolejní 4, 612 00 Brno, ČR
Tel.: +420 541 14 11 58
Fax: +420 541 14 11 23
e-mail: solc@feec.vutbr.cz

